2. 3. - L'INFINI

2. 3. 1.

Ci-après, nous tenterons d'exposer les principaux développements auxquels l'idée d'infini a pu donner lieu. Dans ce cadre, il aurait été difficile d'éviter l'exposition de concepts mathématiques – que nous avons néanmoins voulu limiter au strict nécessaire pour notre propos. Aussi pouvons-nous inviter à lire ce qui suit même ceux qui sont réfractaires à tout ce qui ressemble à une équation. En même temps qu'encourager à ne pas trop s'attarder ceux qui peineraient à saisir l'objet des calculs présentés. Notre propos n'a rien de mathématique en effet. Il porte sur l'infini, qui représente un concept déroutant, même pour un entendement mathématicien ; l'histoire du calcul intégral en témoigne assez.

*Notre propos sera plus proprement métaphysique. Il n'est pas d'autre terme en effet pour qualifier ce que les notions d'infinitésimal et de continuité vont nous conduire à mettre en question : le sens même de la réalité. Que tel soit l'enjeu des spéculations mathématiques sur l'infini, plusieurs auteurs, comme Hermann Cohen, l'ont noté (*Le principe de la méthode infinitésimale et son histoire*, 1883*[1]*). Mais sans en tirer peut-être toutes les conséquences.*

*

Quand on pense l'infini, on considère en général quelque chose qu'on comprend inachevable comme l'univers, l'espace, le temps. Quelque chose à quoi on ne peut fixer ni terme ni commencement ; bien qu'on peine à saisir de quelle réalité il peut s'agir ainsi. L'infini nous échappe. Il marque a priori la limite de notre compréhension. D'un côté, son idée paraît simple : c'est ce qu'on peut toujours concevoir plus grand. Mais la chose alors dépasse notre imagination. Nous peinons à la concevoir comme chose, comme réalité. Par un calcul, on peut décomposer un mouvement ou une aire à l'infini. On n'imagine pas pour autant

[1] trad. fr. Paris, Vrin, 1999.

que ce mouvement ou cette aire soient réellement composés d'éléments en nombre infini. Sinon, comment pourraient-ils être formés ? Comment pourraient-ils former un tout ?

Comment concevoir ce qu'on ne peut se représenter ? On admettra que l'infinitésimal peut être une commodité pour le calcul. On concevra beaucoup plus difficilement, avec Georg Cantor, qu'on puisse calculer avec des infinis, comme s'il s'agissait d'objets. Nous mathématiciens savons créer des objets que la nature ne connaît pas, disait Cantor. C'est précisément ce que beaucoup refuseront de lui accorder ; respectant l'interdit posé par Kant qu'il n'est pas de connaissance possible affranchie de l'intuition d'un objet. Seule, la réflexion ne peut donc découvrir aucune réalité. De sorte que toute métaphysique menace a priori d'être naïve, de n'être qu'une songerie. Mais peut-être est-ce là s'interdire de comprendre l'infini et le monde avec lui. C'est s'interdire de comprendre pourquoi et comment le monde nous paraît nécessairement infini. Cela nous fera retourner à Leibniz – éclairé ici par Bolzano, Cantor et Hegel.

*Leibniz fut le premier sans doute à comprendre tout ce qu'on pouvait tirer du calcul infinitésimal, tant en termes mathématiques (la notion de fonction à la base de l'analyse) que métaphysiques : le monde converge en chaque être qu'il contient et qui l'exprime ainsi. De sorte que rien ne peut être compris qu'en continuité avec le monde entier. Le fini ne peut être compris comme tel qu'à l'infini. Selon une excellente expression de Jean Cavaillès, l'infini est le rejet de l'arbitraire : à travers lui, la pensée n'est pas arrêtée sur un exemple ou par la considération de quelque objet particulier ou détermination ponctuelle (*Sur la logique et la théorie de la science*, posthume 1946, p. 81*[2]*). Penser le monde, ainsi, c'est penser à l'infini car celui-ci est le point de vue du monde attaché à la moindre chose. Le monde est au bout de chaque être, dont aucun n'est son centre mais dont chacun est comme la limite. L'infini est la mesure métaphysique du monde. L'apercevoir doit nous dispenser d'en rechercher une vision ou une représentation, souligne Hegel, puisque l'infini n'est que le corrélât de toute opération de détermination - nous ne déterminons rien que par un passage à la limite. Loin d'être par essence indéterminé, l'infini est la détermination même !*

[2] Paris, Vrin, 1997.

De sorte que s'il n'est pas question de saisir ou de voir l'infini, il ne nous est pas interdit de le comprendre. Il nous est permis de comprendre sans représentation.

Rassurons néanmoins le lecteur qui se trouverait désorienté face à de telles affirmations. L'infini est effectivement une idée fort difficile ! Mais c'est un concept décisif. Nous nous attacherons à le développer ci-après à travers trois grandes étapes : en I, nous poserons la problématique de l'infini actuel. En II, nous retracerons ses développements formels à travers une présentation historique du calcul de l'infini. En III, nous nous pencherons plus particulièrement sur l'infini métaphysique.

I - L'infini actuel

2. 3. 2.

*Dès qu'on pense l'infini, une idée s'impose : est infini ce qui est illimité. Soit, sous un jour plus qualitatif, ce qui est inépuisable. Immédiatement, une valeur s'attache ainsi à l'infini : il surpasse tout ce qui est. C'est à ce titre un attribut que, très tôt, on appliqua à Dieu. Une telle attribution apparut, pour autant que nous le sachions, avec les présocratiques. Elle perdurera et connaîtra de nombreux avatars, notamment au Moyen Age - ainsi l'*En soph *(le "sans fin" en hébreu) des kabbalistes espagnols du XIII°. De nos jours encore, "infini" est un superlatif commun pour dire que quelque chose a une intensité exceptionnelle – en France, dans les années 2000, il est même devenu assez courant de remercier « infiniment ».*

Les analyses qu'Aristote consacre à l'infini passent très généralement pour représenter le point de vue le plus commun sur la question jusqu'à l'âge moderne. D'Aristote, en effet, on retiendra principalement que nous ne rencontrons jamais et ne pouvons même rien nous représenter de positivement infini. En première approche, l'infini ne nous renvoie pas à une réalité mais à une possibilité : celle d'un accroissement ou d'une diminution indéfinis, que l'on applique par exemple à l'espace et au temps. L'infini n'a rien d'actuel. Il semble n'être qu'une pensée, une possibilité logique. En ce sens, Aristote fut l'un des rares penseurs à avoir eu le scrupule rationnel de considérer qu'il est difficile d'appliquer au divin une idée aussi pauvre que celle d'infini ! Ce scrupule sera peu partagé. Qu'on ne rencontre ni ne puisse concevoir rien d'infini n'empêcha guère qu'on emploie le terme pour caractériser Dieu. On s'épuise à penser l'infini autant qu'à le compter ? Il passera pour être la marque d'une transcendance qui échappe à toute représentation. Ou celle de l'inépuisable puissance de la Nature. Dans la perspective de l'absolu, en effet, ce qui n'a guère de sens acquiert un attrait particulier. Il devient mystère ou principe suprême d'explication.

Ce double point de vue nous est demeuré commun sans doute. D'un côté, il y a des réalités indéfinies, dont nous ne percevons pas la fin et dont nous concevons qu'elles reproduisent indéfiniment le même principe de formation. Ainsi sont les suites de nombres, deux miroirs mis en abyme, les objets fractals et le dessin de La Vache qui rit.

D'un autre côté, nous désignons plus proprement comme infinies des réalités en lesquelles l'ensemble des choses se recueillent : l'espace, le temps et le monde lui-même ; ainsi que ce qui outrepasse le monde lui-même : Dieu. Nous qualifions de tels objets de pensée d'infinis parce qu'il semble absurde de vouloir leur fixer un terme.

Entre l'infini et l'indéfini, nous ne reconnaissons rien de mondain qui soit proprement infini. Nous ne concevons pas d'infini actuel. Le terme marque notre impuissance à voir, à imaginer. Ce qui revient à dire que pour l'admettre au titre de quelque réalité positive, il nous faudrait saisir un objet assignable ; de l'infini, il nous faudrait voir la fin.

Ainsi la formation d'un concept mathématique comme celui de limite, à l'âge moderne, n'y aura rien changé. Sans surprise : pour ne l'avoir guère développée et précisée, les Anciens n'ignoraient nullement une telle notion. C'est comme limite, notamment, qu'ils pouvaient définir l'instant. Or, même s'ils le réputèrent capable de rassembler toute une vie, ils n'en vinrent pas à concevoir l'instant comme une réalité proprement infinie.

Nous allons développer ces thèmes ci-après, sous leur perspective historique. Nous envisagerons ainsi successivement : A) l'infini et l'indéfini. Avant de nous pencher plus particulièrement sur B) l'instant.

A) L'infini et l'indéfini

2. 3. 3.

L'illimité.

Plusieurs philosophes présocratiques ont parlé de l'infini. Mais sans avoir eu, semble-t-il, une claire conscience des difficultés que ce terme soulève, note un historien de l'infini (Jonas Cohn *Histoire de l'infini*, 1896[3]). De fait, "l'illimité" (*apeiron*) qu'ils invoquaient ne peut guère être comparé à notre concept d'infini.

Dans la pensée archaïque grecque l'*apeiron* est un terme très élastique. Il désigne tout ce qui est grand (comme les armées dans l'*Odyssée*), innombrable et si vaste qu'on n'en perçoit pas les limites - ainsi des parallèles qui, prolongées à l'infini, ne se rejoignent jamais. Sachant qu'à l'époque d'Euclide, on ne savait pas écrire des nombres supérieurs à 10 000 (une myriade) et qu'on ne songeait guère à compter plus loin qu'une myriade de myriade.

Par extension, l'*apeiron* sera la limite extrême au-delà de laquelle il n'y a rien. Et en ce dernier sens, proche parent du chaos, règne de l'indéterminé, l'illimité sera longtemps identifié au pur néant et pensé, selon une analogie spatiale un peu naïve, comme ce qui est infranchissable, impossible à parcourir. Un vide qui affole la pensée[4]. L'*infinitum* latin désignera aussi bien ce qui est sans terme ni but et ne peut être ni franchi ni parcouru.

Héraclite postulait une succession infinie de mondes. Les atomistes parlaient, eux, d'un vide infini où s'assemblent les atomes et les mondes, en nombre également infini (voir 2. 1. 11.). Mais il fallut attendre Aristote pour que soit précisé le sens de ce mot. Le premier, il tenta de définir l'infini en lui-même et selon son concept.

Aristote. L'infini n'est rien.

Dans sa *Physique* (vers 335-332 av. JC, Livre III, 2° partie[5]), Aristote s'attache d'abord à montrer que l'infini ne peut exister au sens des choses sensibles. Qu'il n'est, en d'autres termes, rien d'*actuel*. A s'en tenir à la définition de l'infini comme ce qui ne peut être parcouru, en effet, l'infini ne peut être en lui-même une chose, une substance, car alors il serait soit indivisible, ce qui est évidemment contre sa nature (car l'infini se caractérise par la *répétition* indéfinie des unités qui le constituent) ; soit divisible. Mais alors ses parties seraient également infinies, ce qui est contradictoire s'il a le statut d'une substance, d'un tout. A l'infini, en effet, la partie est égale au tout (les nombres pairs sont en nombre

[3] trad. fr. Paris, Cerf, 1984.
[4] Voir T. Lévy *Figures de l'infini*, Paris, Seuil, 1987.
[5] trad. fr. en 2 volumes, Paris, Les Belles Lettres, 1983.

infini, comme l'ensemble des nombres dont ils ne sont qu'une partie), ce qui semble absurde si l'infini a de l'être. Si l'on conçoit un être infini.

L'infini, poursuit Aristote, n'est pas même un principe, un attribut qu'on peut appliquer aux corps. Un corps infini, en effet, est un non sens. Est corps ce qui est *assignable*, c'est-à-dire ce qui est limité par une surface et ce qui possède un lieu, un bord. Infini, il lui faudrait une surface et un lieu infini. Autant dire qu'il n'aurait ni lieu ni surface du tout.

L'infini ne peut donc être la qualité d'une chose. Et il n'est pas un nombre non plus. Un nombre est nombrable et peut être compté. L'infini ne le peut. Il est indéterminé et ne peut donc être une quantité. En fait, souligne Aristote, il n'est rien de ce qui est.

L'infini est seulement indéfini.

Pourtant, reconnaît Aristote, on est obligé d'admettre l'existence de l'infini dans certains cas. Sans lui, en effet, le temps aurait eu un commencement et il aurait une fin, ce qui est inconcevable. Les grandeurs seraient indivisibles et la suite des nombres achevable. L'infini, cependant, réaffirme Aristote, n'est pas actuel et ne peut donc constituer une quantité réelle : les jours passés, les hommes morts sont en quantité innombrable si le monde n'a pas eu de commencement. Mais ils ne sont pas infinis au sens où leur infinité représenterait une grandeur définie. Ils sont en nombre indéfini.

Infini est ce qui est toujours en génération et en corruption, dit Aristote. En ce sens, précise-t-il - et en ce sens seulement - l'infini est en acte (206b). Mais toute sa réalité se limite à cette progression indéfinie qui, dans le temps, empêche toute constance des choses dans leur être. L'essence de l'infini est la continuité inépuisable. Pure puissance qui n'a pas de terme pensable, l'infini n'est rien de réel au-delà – une longueur peut être divisée à l'infini, cela ne signifie pas qu'elle est infiniment longue. Aristote répond ainsi aux paradoxes de Zénon (voir ci-après).

Une puissance en acte mais non pas un attribut de puissance.

L'infini, pour Aristote, est une sorte particulière de puissance qui reste toujours telle. C'est en ce sens qu'on peut dire, malgré le paradoxe, qu'il est une puissance en acte. Il consiste dans la possibilité d'un progrès indéfini et Aristote le définit à l'aide d'une formule - "plus spirituelle que rigoureuse", souligne Jonas Cohn - comme ce au-delà de quoi il y a toujours quelque chose.

Pour autant, selon l'accroissement, il n'y a pas d'infini qui surpasse toute grandeur, dit Aristote. L'infini n'est pas une grandeur en effet mais une indétermination. *L'infini est la marque d'un manque de perfection. Il ne peut à ce titre être attribué au divin*. C'est que l'infini n'est pas ce en dehors de quoi il n'y a rien mais ce hors de quoi il y a toujours quelque chose. Il est justement ainsi le contraire du divin achevé et entier et d'où rien n'est absent. Le Premier Moteur n'est pas étendu. Il n'a aucune grandeur, finie ou infinie.

L'infini, dit Aristote, entre plutôt dans la notion de la partie que dans celle du tout. Comme la matière, il est à l'intérieur de quelque chose qui l'enveloppe : une forme. Tandis que le divin est forme pure. Or, soutenant ceci, Aristote précise qu'il affirme "le contraire de ce qu'on dit" (206b). L'attribution de l'infini au divin devait ainsi être chose courante.

*

L'infinité de Dieu.

Pour autant que nous le sachions, Anaximandre de Milet fut le premier à qualifier "d'illimité" (*apeiron*) le principe du monde.

"De ceux qui disent que le principe est un, mû et illimité, Anaximandre, successeur et disciple de Thalès, a dit que l'Illimité est le principe et l'élément des choses qui sont, étant du reste le premier à user du terme de principe. Il dit qu'il n'est ni l'eau, ni rien d'autre de ce que l'on dit être des éléments, mais qu'il est une certaine autre nature illimitée dont sont engendrés tous les cieux et tous les mondes qui se trouvent en eux. (…) Il est évident qu'après avoir observé la transformation mutuelle des quatre éléments, il ne pouvait estimer qu'on pût assigner à l'un un rôle de substrat, mais qu'il fallait bien qu'il y eût quelque chose d'autre en plus de ces quatre éléments" (Simplicius *Commentaire sur la Physique d'Aristote*, 24, 13[6]).

Encore une fois, ce mot "*apeiron*" ne doit pas tromper. L'Antiquité a d'abord conçu le divin comme indéterminé en un sens positif et, de là seulement, "lentement et presque inconsciemment", note J. Cohn, comme infini. De signe d'incomplétude et de multiplicité, l'infini en vint ainsi peu à peu à marquer la suprême puissance et perfection de l'être qui est par soi. Philon d'Alexandrie sera l'un des premiers, en ce sens, à parler de Dieu comme infini.

Philon, qui était de confession juive, innovait tant par rapport à la tradition grecque que par rapport au judaïsme. Peu d'éléments à ce sujet apparaissent en effet dans l'Ancien Testament, sinon quelques psaumes d'influence grecque (vers 311-140 av. JC), qui célèbrent plutôt l'éternité de Yahvé que son infinité : *Ps* 119 v. 89-90 ; *Ps* 135 v. 13 ; *Ps* 145 v. 13.

[6] in *Les Présocratiques*, trad. fr. Paris, Pléiade Gallimard, 1988.

A travers Numénius, les idées de Philon seront reprises par Plotin[7] et, finalement, les arguments d'Aristote n'empêchèrent guère de rapprocher l'infini, ce qu'on ne peut saisir, du divin, qui ne se laisse pas circonscrire. Cela indique également que c'est comme image plus que comme idée que l'infini caractérisera le divin. En n'appréhendant l'infini que comme quelque chose de négatif, comme un au-delà, l'entendement croit le placer d'autant plus haut, note Hegel. Il l'estime davantage qu'il l'éloigne comme une chose étrangère (*Principes de la philosophie du droit*, 1821, § 22[8]).

*

Deux sens de l'infini au Moyen Age.

Le Moyen-Age adopta cette doctrine et conçut Dieu comme un être infini, c'est-à-dire comme une réalité défiant toute compréhension. Deux sens de l'infini furent ainsi fixés dès le XIII° siècle. On les trouve clairement exprimés chez Thomas d'Aquin (*Somme théologique*, 1266-1274, I, Question 7[9]).

Au sens privatif, comme l'enseigne Aristote, l'infini est inachèvement et ne peut rien être d'actuel, écrit Thomas. Mais, comme absence de toute limite, il signifie également l'absolu. Dieu est infini parce qu'il est par soi et n'est reçu en rien d'autre. "L'infini qui résulte de ce que la forme n'est pas déterminée par la matière ressortit au parfait". Ainsi, rien d'autre que Dieu ne peut être pleinement infini, précise Thomas. Si les anges participent bien d'une certaine infinité, puisque la matière ne les limite pas, cette "infinité créée" est restreinte aux limites de leur nature (*ibid*. art. 2 Rép.). Les scolastiques ont ainsi distingué différentes acceptions de l'infini. Ils nommeront "catégorématique" l'infini ayant une infinité de parties 1) toutes égales à l'une déterminée d'entre elles ; 2) sans communication ni chevauchement ; 3) existant simultanément. L'infini numérique répond à une telle définition. Si l'une de ces trois conditions faisait défaut, l'infini était dit "syncatégorématique"[10].

---

[7] Voir H. Guyot *L'infinité divine depuis Philon le Juif jusqu'à Plotin (Ier siècle av. JC-III° siècle ap. JC)*, Paris, Alcan, 1906.
[8] trad. fr. Paris, Vrin, 1982.
[9] trad. fr. en 4 volumes, Paris, Cerf, 1981-1984.
[10] Voir J-L. Gardies *Pascal entre Eudoxe et Cantor*, Paris, Vrin, 1984, p. 127 et sq.

Les syntacatégorèmes (ou coprédicats, *consignificantia* en latin), sont des mots n'ayant pas de signification propre, ne désignant aucun objet propre mais qui modifient ou déterminent la signification d'autres termes. Ils acquièrent une signification par combinaison avec d'autres mots.

Chez Thomas, l'infini, même appliqué à la nature divine, demeure un concept négatif qui, s'il en marque la puissance, n'ajoute rien en lui-même à la notion de Dieu, c'est-à-dire à la compréhension que nous pouvons avoir de lui. Il marque, tout au contraire, l'incompréhension que nous avons de lui. Il en allait autrement chez d'autres auteurs à la même époque. Certains se demandaient notamment si le savoir du Christ, en tant que ce dernier est le Verbe divin, si son savoir s'étend en acte jusqu'aux possibles infinis ? Saint Augustin l'avait soutenu : l'infinité des nombres ne l'est pas pour Dieu (*La Cité de Dieu*, entre 410-426, XII, chap. 19[11]). Et, bien après lui, saint Bonaventure affirma que si la puissance de connaître de Dieu est infinie, elle va jusqu'aux infinités et connaît ainsi la totalité des nombres (*Questions disputées sur le savoir chez le Christ*, 1254, Question 1[12]). Il ne s'ensuit pas cependant que de telles infinités existent réellement en acte, précise Bonaventure. Elles n'ont que le statut de possibles… L'infini est une image si forte, prêtée à Dieu, qu'elle supporte de telles contradictions !

Un peu plus tard, Jean Duns Scot conférera à l'infinité divine le sens positif d'une intensité d'être et ira jusqu'à en faire la détermination ultime de l'essence divine (*Traité du premier principe*, vers 1305, IV° partie[13]). Duns Scot, a-t-on écrit, dépassa l'horreur aristotélicienne de l'infini et ouvrit un nouvel espace de pensée[14]. Il tendit à identifier le bien infini et la volonté libre (IV, 80, p. 99). Ainsi, dans son *Commentaire des sentences* (1342), Grégoire de Rimini, dépassant l'idée de l'infini comme maximum dans l'ordre du nombrable, pourra ainsi penser l'infini comme ce qui est d'un autre ordre que le fini. En son espèce, soutiendra-t-il, la charité peut être d'intensité infinie[15]. Concevoir l'infini quantitativement, c'est le borner, redira d'un point de vue "mystique" René Guénon, croyant faire là une grande découverte. L'indéfini ne peut être infini car son concept comporte toujours une certaine détermination (*Les principes du calcul infinitésimal*, 1946[16]).

---

[11] trad. fr. Paris, Garnier, 1957.
[12] trad. fr. Paris, Oeil, 1985.
[13] trad. fr. Lausanne, Cahiers de la revue de théologie et de philosophie, 1983.
[14] Voir E. Gilson *Jean Duns Scot. Introduction à ses positions fondamentales*, Paris, Vrin, 1952, p. 208 et sq.
[15]Voir J. Biard *Logique et physique de l'infini au XIV° siècle* in F. Monnoyeur (Ed.) *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*, Paris, Belin, 1992.
[16] Paris, Gallimard, 1946.

De telles formules peuvent toujours facilement être reçues de nos jours. Une douleur, une joie ou tout autre sentiment fort seront facilement qualifiés "d'infinis". Il est cependant difficile d'entendre dans cet adjectif plus qu'un simple superlatif.

*

2. 3. 4.

Giordano Bruno. Tout est possible à l'infini.

Encore un peu plus d'un siècle et Giordano Bruno ouvrira l'univers et le concevra comme infini, ce que ni Copernic, ni Galilée, ni Kepler n'avaient osé ou n'oseront faire. Cela, il est vrai, coûtera la vie à Bruno, que l'Inquisition fit condamner au bûcher.

Du point de vue du Dogme, cette condamnation se justifiait. En déclarant le monde infini, Bruno réintroduisait en effet l'idée épicurienne selon laquelle, à l'infini, tout ce qui est possible est réel. De sorte qu'il n'est nul besoin d'une Providence pour justifier de la production des êtres et de leurs qualités. A l'infini, la Nature est toute puissante et inépuisable. Elle est, comme chez Anaximandre, principe de création "illimité". Le monde n'a donc pas besoin d'un Dieu. Ce fut là l'une des idées les plus fondamentales des libertins (voir 2. 4. 5.). Pour l'Eglise, cette idée était menaçante. D'autant qu'elle pouvait assez facilement paraître s'imposer.

Attribuer une puissance infinie à Dieu posait en effet un évident problème : si rien n'est impossible au Créateur, pourquoi, dans sa finitude, le monde court-il vers son achèvement au lieu d'avoir été d'emblée achevé ? On avait beau, comme Thomas Cajetan, expliquer qu'une force infinie est forcément intelligente et donc libre de ne pas agir selon toute sa puissance ; que Dieu permet le temps, ainsi et permet que ne soit pas achevé le mouvement de la masse finie du monde en un seul instant (*Subtilissima de Dei gloriosi infinitate intensiva quaestio*, 1499[17]). Il restait un évident problème. Car la question était de savoir comment ce Dieu qui peut tout, qui est tout, peut encore passer pour distinct du monde. Infini, Dieu peut-il encore être une personne ? Ne faut-il pas une limite pour être un soi ?

C'était poser une question qui sera déterminante pour le destin du christianisme en Occident : la volonté de Dieu est-elle distincte de tout ce qu'il peut concevoir et réaliser ? Si non, en quoi Dieu est-il distinct de la Nature ? En quoi est-il autre chose que ce qui simplement est, selon la Nécessité ? Si oui, sa toute-puissance n'est-elle pas contradictoire

[17] in Thomas d'Aquin *In octo physicorum aristotelis libros commentaria,* Parisiis, apud Vam D. Moreau, 1649.

avec sa miséricorde ? Si l'on peut tout, que peut-on encore souhaiter ? Un être tout-puissant et tout-sage, faisait remarquer Carnéade, n'a besoin ni de courage, n'ayant rien à redouter, ni de tempérance, n'ayant pas à se défendre de ses désirs. Un tel être n'est donc pas vertueux puisqu'il ne possède pas de telles qualités. Et s'il ne les possède pas, il doit avoir les vices opposés et donc tous les vices (d'après Cicéron *De la nature des dieux*, III, chap. 17 à 20[18]). Fallait-il dire alors que si Dieu veut quelque chose, c'est qu'il ne peut l'obtenir de sa seule puissance ? Mais comment oser limiter la puissance de Dieu ? On ne pouvait ainsi au total en nier l'infinité et pas davantage la dire absolue sans assimiler Dieu au monde, à la nature, au sens où tout ce qui est et survient ne serait pas provoqué par Dieu mais serait Dieu, le tout-puissant. C'est-à-dire tout ce qui est, puisque rien ne peut être vraiment face à ce qui peut tout. Sachant enfin que si Dieu est tout, il n'y a pas de Dieu qui, comme une personne, peut choisir et vouloir quelque chose parmi tout ce qui est.

La question était donc d'importance et si Descartes réserve encore ainsi, comme Thomas d'Aquin, l'infini à Dieu seul - pour souligner sa toute puissance incompréhensible - tandis qu'il désigne le monde en regard comme simplement indéfini (*Principes de la philosophie*, 1644, I, §§ 24-27[19]) - la matière se divisant en parties indéfinies et innombrables (II, §§ 34-35) - cela n'était sans doute pas seulement une pseudo-distinction destinée à se concilier les théologiens, comme certains de ses contemporains, tel Henry More, le pensèrent. Et il est encore plus difficile de dire avec Maurice Merleau-Ponty que Descartes rompit avec une tradition dominante assimilant la perfection à l'achèvement et au fini (*Signes*, 1970, p. 186 et sq.[20]). Un siècle plus tard, Kant hésitera encore, lui aussi, entre les termes de ce débat.

Si Kant voulait bien admettre l'existence de l'infini actuel dans ses premières oeuvres, même s'il reconnaissait qu'il était "difficile de pénétrer la nature de ce concept" (*Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeurs négatives*, 1763, avant-propos[21]), il expliqua dans la *Critique de la raison pure* (1781) que seul le concept d'un infini potentiel est légitime. Plus tard encore, il atténua cette dernière thèse et admit définitivement l'idée de l'infini actuel, sans considérer, toutefois, qu'il soit connaissable.

*

Descartes.

---

[18] trad. fr. en 4 volumes, Bruxelles, Latomus, 1970-1986. Voir L. Robin *Pyrrhon et le scepticisme grec*, Paris, PUF, 1944, p. 105 et sq.
[19] *Oeuvres philosophiques*, 3 volumes, Paris, Garnier, 1988.
[20] Paris, Gallimard, 1970.
[21] *Oeuvres philosophiques*, trad. fr. en 3 volumes, Paris, Pléiade Gallimard, 1980.

De l'idée de l'infini en nous, Descartes fait une véritable révélation existentielle (*Méditations métaphysiques*, 1641, III° Méditation). Nous trouvons en nous l'idée d'un être parfait et infini. Cette idée est en nous mais ne peut être de nous car, êtres finis, nous ne pouvons avoir l'idée d'une substance infinie - qui est une idée fort claire et fort distincte, précise Descartes, alors même que nous ne comprenons pas l'infini ! Et cette idée est première dans l'ordre des raisons. On n'arrive pas à l'infini par le recul progressif d'une limite. Nous ne concevons pas Dieu par extrapolation de nos propres facultés. C'est plutôt le fini qui ne se conçoit que comme la limitation de l'infini (*Lettre à Clerselier*, 23 avril 1649)[22].

Spinoza distinguera de même le faux infini - l'infini numérique - du vrai infini (*Lettre XII à Louis Meyer*, 1663[23]). Car le véritable infini ne s'obtient pas par sommation (*Ethique*, 1675, I, proposition XV, scolie). Il correspond à une affirmation absolue d'existence (I, prop. VIII, scolie I). Une substance infinie ne connaît aucune limitation. Elle est unique et existe selon la seule nécessité de sa nature. Elle est déterminée par soi seule à agir (I, prop. XVII, corollaire I). Une quantité véritablement infinie, affirme Spinoza, n'est pas mesurable et ne peut être composée de parties. L'infini vrai est Un. Très loin du faux infini qui est inachevable.

Descartes se refusait à entrer dans les "disputes de l'infini" (savoir si la moitié d'une ligne infinie est infinie, si le nombre infini est pair ou impair, etc.), comme il le souligne dans une *Lettre à Mersenne* du 15 avril 1630. Nous, êtres finis, ne devons pas songer à comprendre l'infini, soutient-il. De sorte que l'indéfini cartésien est essentiellement négatif. Il relève d'un jugement suspendu en raison de l'impossibilité de l'achever.

Au total, Descartes affirme que le caractère propre de l'infini est d'être conçu sans pouvoir être compris. Pour autant, il refuse toute idée d'un infini actuel au nom de son obscurité même - nous verrons ci-après quelle attitude, en ce sens, il adoptera face aux premiers développements du calcul infinitésimal. Pour dire que quelque chose est infinie, souligne-t-il, il faudrait qu'on ait quelque raison qui la fasse connaître telle, comme n'importe quelle autre réalité positive. Il ne suffit pas de ne pas avoir de raison de dire qu'elle n'a pas de bornes, écrit-il (*A Chanut*, le 6 juin 1647).

Ainsi, de l'Antiquité jusqu'à l'âge classique, on prit le plus souvent pour option de réserver l'infini à Dieu et l'indéfini au monde. Entre les deux, entre l'infinité

---

[22] Voir J. Laporte *Le rationalisme de Descartes*, Paris, PUF, 1950, p. 121 et sq.
[23] in *Oeuvres complètes*, trad. fr. Paris, Pléiade Gallimard, 1954. Voir M. Guéroult *Spinoza I*, Paris, Aubier Montaigne, 1969, Appendice IX.

incompréhensible de Dieu et le caractère inachevable de l'indéfini, l'idée d'un infini actuel était rejetée - seul Plotin représente une exception de taille, à cet égard, nous le verrons plus loin. Ainsi ne reconnut-on guère l'infini lui-même dans l'horizon, dont la représentation était apparue en peinture.

*

Apparition du ciel et de l'horizon en peinture.

Avec l'invention de la perspective frontale (voir 2. 2. 5.), le point de fuite sur les toiles trouera le traditionnel fond doré représentant l'infinité divine, que le paysage, reculé jusqu'aux lointains, finira par effacer complètement[24]. Les nuages alors, au fond des toiles, ouvriront sur l'infini[25].

Un tableau conservé à la Alte Pinakothek de Munich - La *Visitation de la Vierge* par le Maître du mariage de la Vierge (actif à Cologne vers 1463-1480) - montre exactement, comme à mi-chemin, le paysage en train de mordre, timidement, sur le fond doré - lequel sera bientôt remplacé par le ciel.

Déjà, il tendait à être pris comme un espace réel. Cinq anges dansent autour de lui dans un tableau de Giovanni di Paolo (XV° siècle[26]). Il représente un nuage dans un tableau de Fra Angelico, etc.

[24] Sur ce thème, voir J. V. Field *The invention of infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*, Oxford University Press, 1997.
[25] Voir H. Damisch *Théorie du nuage*, Paris, Seuil, 1972.
[26] Au Musée Condé, à Chantilly. Le fond doré de ce tableau a peut-être été rajouté plus tardivement.

Ainsi l'absolu ne put plus être immédiatement signifié en peinture. Dieu se retira pour laisser place à des ciels ouverts jusqu'à l'horizon. On ne représentera plus directement l'absolu, dès lors. On s'attachera plutôt à le faire comprendre. Le fond doré des toiles disparut en emportant avec lui l'infinité et tout en ouvrant sur l'infini actuel. Toute grandeur continue est divisible à l'infini, affirme Léonard de Vinci dans son *Traité de la peinture* (1490-1517, III, n° 340[27]). Toute action humaine offre une infinité d'aspects.

La représentation de l'horizon matérialisait en effet une idée qu'on n'avait encore guère conceptualisée : celle de limite qui, immédiatement, associe l'inépuisable et le borné. Mais une telle idée demeurait peu employée - sauf, de manière notable, pour penser l'instant.

* *

B) L'instant

2. 3. 5.

Une différence évanouissante, insaisissable.

Le problème de l'instant est celui même du changement. Dans le passage d'un état à un autre, d'un contraire à un autre, en effet, il est un temps dans lequel ni l'un ni l'autre ne peuvent être, souligne Platon dans son *Parménide* (vers 367 av. JC, 3° hypothèse[28]). Un homme meurt. A quel instant meurt-il ? La vie et la mort ne peuvent intervenir dans le même temps, car rien alors ne changerait. Or il s'agit précisément de *passer* de l'une à l'autre dans leur opposition. La mort ne serait rien pour celui qui n'aurait jamais placé sa vie au-delà de l'instant. "Si je n'y crois pas jusqu'au dernier instant, jusqu'à la plus fine

[27] trad. fr. Paris, Club des libraires de France, 1960.
[28] *Oeuvres complètes II*, trad. fr. en 2 volumes, Paris, Pléiade Gallimard, 1950.

limite, je ne mourrai jamais", se dit Philippe Gerbier juste avant son exécution (ratée), dans le film de J-P. Melville *L'armée des ombres* (1969).

Il faut que le changement ait lieu dans un temps qui n'est pas un temps mais qui fait partie du temps. Dans *l'instant*, qui marque ainsi à la fois dans les choses la discontinuité et la continuité sans lesquelles il n'y aurait aucun changement. L'instant est une différence insaisissable, au sens où on ne peut la circonscrire, écrit Platon. Car on peut toujours la réduire. C'était là l'idée de *différentielle*, énoncée peut-être pour la première fois, a-t-on dit[29]. Toute vraie création ne peut avoir lieu que dans l'instant, écrit Vladimir Jankélévitch. Elle est l'instant même, c'est-à-dire ni le devenir ni l'être mais un presque-rien, un *quasi nihil* (*Philosophie première*, 1953, chap. IX, VII[30]).

Aristote. L'instant n'est pas du temps.

Aristote refusera de dire que le temps est composé d'instants, comme d'autant de grains élémentaires de durée dont la somme le constituerait (*Physique*, vers 335-332 av. JC, IV, 1013[31]). C'est que le temps est essentiellement continu. Si on le divise en moments, il n'est plus possible d'en assurer la continuité. Des instants différents, en effet, ne peuvent coexister, au même moment, comme des points sur une même ligne, car rien ne serait plus antérieur ni postérieur à rien. Mais pas davantage ces instants peuvent-il se succéder. Cela n'est concevable, en effet, ni dans l'instant où ils sont instants ni dans un autre instant.

L'instant, le *kairos*, n'est pas identifié au temps par Aristote tout en lui demeurant étroitement associé. Il est un accident du temps, comme le nombre s'applique au temps tout en étant indépendant de lui. L'instant est la *limite* entre le passé et le futur. C'est à ce titre, non pas qu'il assure mais qu'il marque, selon Aristote, la continuité du temps. Il est l'expression de celle-ci et non son ressort ou son composant.

L'instant nous donne à connaître d'un seul tenant l'antérieur et le postérieur, qu'en tant que limite il réunit. Ces parties du temps dont l'instant est ainsi la limite, souligne Aristote, n'ont d'autre réalité que celle qui leur est conférée par l'esprit[32]. Car ce n'est que dans l'instant que le temps existe pour nous ; qu'il est temps, c'est-à-dire succession et non pur moment immédiat. Edmund Husserl redira plus tard que l'instant correspond avant tout à la perception du temps.

---

[29] Voir L. Robin *Les rapports de l'être et de la connaissance d'après Platon*, paris, PUF, 1933.
[30] Paris, PUF, 1986.
[31] trad. fr. en 2 volumes, Paris, Les Belles Lettres, 1983.

Husserl. La conscience de l'instant.

Comment d'instants peut être tirée une durée ?

Tout ce que nous percevons du temps c'est, à chaque instant, un moment ponctuel. Nous avons conscience du passé et tentons de nous représenter l'avenir mais nous ne les percevons pas actuellement par définition. Comment, dès lors, la conscience du temps s'élabore-t-elle ? Comment la conscience de simples instants indéfiniment répétés peut-elle faire de la durée ?

Différentes théories peuvent être avancées pour expliquer comment se constitue la conscience d'une réalité dont le propre, comme une mélodie, est de ne se donner que dans une certaine durée. La liaison entre les différents instants paraît en effet pouvoir relever d'un acte de jugement (point de vue intellectualiste), de l'imagination (associationnisme) ou de la perception elle-même (perceptionnalisme). C'est ce dernier point de vue que, dans ses *Leçons pour une phénoménologie de la conscience intime du temps* (cours professés de 1904 à 1910[33]), Edmund Husserl reprend et réélabore.

*

Husserl note que la conscience est d'emblée conscience d'une durée indépendante d'elle, sans qu'il soit besoin de présupposer à cet effet un temps objectif extérieur ("l'analyse phénoménologique ne permet pas de trouver la moindre miette de temps objectif", écrit Husserl). Autant dire que le temps n'est jamais senti comme une donnée extérieure. Si la conscience est d'emblée durée, cette durée ne relève pas d'une sensation, liée à la persistance d'une excitation externe. Même si une excitation peut persister en elle-même, c'est-à-dire durer, il ne s'ensuit pas qu'elle sera forcément sentie comme ayant une durée. La durée de la sensation n'est pas la sensation de la durée (§ 3). Husserl entend plutôt montrer que le temps senti est *d'emblée* chargé de caractères auxquels appartiennent certaines exigences, certaines possibilités qui constituent sa durée. "Le temps, écrit Husserl, est une vérité apriorique qui appartient aux moments constitutifs de l'objectivité" (§ 2). Le temps est durée *dès* la conscience[34].

Rétention et protention.

Il y a durée parce qu'il y a *rétention*, c'est-à-dire qu'à chaque représentation donnée se rattache pour la conscience une suite continue de représentations dont chacune reproduit le contenu de la précédente. *Cette rétention a lieu au présent, bien qu'elle soit indépendante de l'impression proprement dite* (§ 11). Elle n'est pas la modification continue d'une impression extérieure mais la modification continue d'une sorte de souvenir primaire qui colle à la perception (§ 17). En regard, le souvenir, au sens où on l'entend couramment - ce que Husserl nomme "souvenir secondaire" - se distingue d'elle en ce qu'il ne donne plus lieu à une perception.

---

[32] Voir J. M. Dubois *Le temps et l'instant selon Aristote*, Paris, Desclée de Brouwer, 1967.
[33] trad. fr. Paris, PUF, 1964.
[34] Voir G. Granel *Le Sens du Temps et de la Perception chez E. Husserl*, paris, Gallimard, 1968, I° partie.

Comme le montre l'exemple de la perception d'une mélodie (§ 14), il est de l'essence de l'intuition du temps d'être en chaque point de sa durée conscience du tout juste passé et non simplement du pur instant présent et tel est le rôle de la rétention. Pierre Maine de Biran notait en ce sens que les sons entendus sont redoublés au dedans de nous en quelque sorte par des sons intérieurs capables de subsister indépendamment des sons extérieurs (*Mémoire sur la décomposition de la pensée*, 1802[35]).

Ainsi, il y a bien une différence entre le passé qui fait partie du présent de la mélodie que l'on est en train d'écouter et le passé du souvenir qu'on ne peut qu'imaginer parce qu'il n'est plus donné. La perception, note Husserl, est un processus continu, traversé par un lien de conscience. C'est un acte "en dégradé continu" (§ 19), en regard duquel *le maintenant, l'instant n'est qu'une limite idéale*. Or cette continuité des contenus - qui fait d'eux autant de grandeurs concrètes et non des quantités discrètes - ne peut venir que de l'unité intentionnelle de la perception.

Par ailleurs, parce qu'elle est durée, la conscience du temps est tout autant rétention que *protention*, c'est-à-dire "intention d'attente constituant à vide l'advenant comme tel" (§ 24). Comme le début d'une mélodie éveille des intentions déterminées qui sont remplies avec le développement progressif de la mélodie, même quand celle-ci est inconnue (*Recherches logiques III*, 1921, § 10[36]).

Toute durée implique des intentions de passé et de futur visant l'enchaînement temporel. "Dans le vécu de l'actualité, nous avons le point-source originaire et une continuité de moments de retentissement. Pour tout cela les noms nous font défaut" (*Leçons*, § 36).

La conscience comme temporalité.

Le passé, ainsi, n'est pas seulement repoussé par le présent. Il a lieu au présent. Il est continuellement modifié à partir du présent de la rétention (à ce titre la rétention est aussi bien protention vis-à-vis de ce qui est passé). Et telle est l'expérience de la durée temporelle.

Husserl renverse ainsi les termes selon lesquels on pense classiquement le temps comme extérieur à la conscience, écrivent des commentateurs. En fait, Husserl s'inscrit plus exactement dans un courant très large de pensée - on peut notamment penser à Kant - pour lequel la conscience est temps et la temporalité l'être même de la subjectivité.

A travers la rétention de la rétention (ou "intentionnalité longitudinale" de la rétention), la conscience est conscience de sa propre durée et ainsi se constitue l'unité du flux temporel dans la conscience comme un ordre uni-dimensionnel (§ 39). Un acte de perception est un percevoir perçu. La conscience d'un objet est la conscience d'un acte, d'un vécu intentionnel (conscience que Husserl nomme "conscience absolue"). Dès lors, passé et présent existent dans la même durée immanente. C'est là un dépassement de la métaphysique de la présence, écrit un commentateur[37]. Vraiment ? C'est là surtout, admirablement décrit, le régime le plus courant de notre perception, tandis que nous croyons plus spontanément que chaque perception consciente est ponctuelle et,

[35] *Œuvres 3*, Paris, Vrin, 1988.
[36] trad. fr. Paris, PUF, 1974.
[37] Voir R. Bernet « La présence du passé dans l'analyse husserlienne de la conscience du temps » *Revue de*

sinon isolée, en tout cas isolable et dotée d'une durée propre, comme si la conscience découvrait le monde à chaque instant et comme si chaque perception n'était pas chargée de mémoire et d'anticipation. Dostoïevski imagine le tourment indicible du condamné à mort pendant le quart de seconde au cours duquel il entend glisser le couperet de la guillotine (*L'idiot*, 1874, pp. 26-27[38]). Mais si toute conscience cesse avec la mort, ce quart de seconde n'existe pas ! Il n'y a pas de derniers instants, faute d'une conscience après la conscience.

Ce constat a visiblement troublé Simone de Beauvoir. Racontant la mort de sa mère, elle rapporte qu'elle ne tenait pas particulièrement à revoir celle-ci une dernière fois. Pourquoi en effet accorder tant d'importance à un instant, écrit-elle, puisqu'il n'y en aura pas de mémoire ? Pourtant, elle ne pouvait supporter l'idée que sa mère ne la reverrait pas. « J'ai compris pour mon propre compte, jusque dans la moelle de mes os, que dans les derniers moments d'un moribond on puisse enfermer l'absolu » (*Une mort très douce*, 1964, p. 95[39]).

L'instant est une limite, dit Aristote. Et s'il désigne à ce titre la continuité d'une succession, il marque tout autant la possibilité que quelque nouveauté survienne. Continuité et novation sont les deux faces de l'instant comme limite. L'instant est le temps continu de la temporalité tout autant que la discontinuité propre au temps historique.

L'instant est tout le temps. De sorte que retenir ce dernier, en suspendre le vol, peut paraître accessible dans l'instant. Non pour arrêter le temps mais pour le saisir tout entier. A travers la mise en suspens du temps dans l'instant, l'intervention de la conscience dans la marche du monde ouvre, autant qu'un passé et un avenir, une dynamique pour l'action[40].

*

L'instant, gage de nouveauté et de création. Carpe diem.

A la pointe d'un instant, le temps paraît ne dépendre que de nous. L'instant semble offrir comme la possibilité folle d'en maîtriser le cours. Si nous sommes soumis au temps, nous pourrons nous reprendre dans l'instant. Car *l'instant est notre temps*.

Vivre sera d'autant plus passionnant que nous n'attendons rien, écrit un auteur. Chaque instant alors sera novateur puisqu'il ne sera le résultat d'aucune préparation ni la préparation d'aucun résultat. Mais le temps étant ainsi comme suspendu à chaque nouvel instant, nous serons obligés de ne rien entreprendre qui ne soit digne d'être éternel[41].

Métaphysique et de Morale n° 2, avril-juin 1983, pp. 178-198.
[38] trad. fr. Paris, Pléiade Gallimard, 1953.
[39] Paris, Gallimard, 1964.
[40] Voir E. Moutsopoulos « La fonction du *kairos* selon Aristote » *Revue philosophique* n° 2, 1985, pp. 223-226.
[41] Voir N. Grimaldi *Le désir et le temps*, Paris, PUF, 1971.

De telles formules sont assez courantes. Elles ressortissent de l'injonction d'Horace de se hâter de jouir de la vie - *carpe diem !* (*Ode XI* : *Carpe diem quam minimum credula postero*, Cueilles le jour, ne crois jamais que demain viendra). Mais, quoique régulièrement applaudies, il n'est pas sûr que de telles formules aient le moindre sens. Aucun instant n'abolit le temps et ne nous délivre du passé et de l'avenir, au sens où il serait l'occasion d'un parfait recommencement. La révélation de l'instant est en fait exactement le contraire : la conscience que, dans le temps, notre histoire a été tracée, qui ne s'effacera plus mais que personne d'autre que nous-mêmes n'a écrite. Dans l'instant, nous découvrons que nous produisons - malgré nous, malgré nos souhaits - de l'irréversible. L'instant nous rend à nous-mêmes. Il nous révèle que la décision que nous allons prendre ne pourra être rattrapée. Car le temps passe. Le temps presse. De sorte que ce que sollicite l'instant est surtout une résolution.

Le kairos, moment opportun.

Dans l'instant le temps est égal à son phénomène. Il est à portée car le temps n'est rien s'il ne s'y passe rien. Le temps n'est pas senti s'il n'est pas nôtre. S'il n'est pas le lieu de résolutions. A considérer le passé et tous les événements du présent, diront les Stoïciens, on assiste d'avance à l'avenir. Le spectacle sera toujours pareil. Rien de nouveau sous le soleil. Quarante ou dix mille ans : que verras-tu de plus ? Toutes les connaissances, l'âme peut les ramasser dans l'instant.

A la limite, l'instant est tout le temps car loin que nos actions prennent place dans un cadre temporel, nos actes seuls déterminent et réalisent le temps. Lequel, pour les Stoïciens, est un incorporel et n'a ainsi pas d'autre existence. Un incorporel, c'est-à-dire non pas un non-être mais un quelque chose non-existant.

Pour les Stoïciens, note Victor Goldschmidt, le bonheur ne dépend pas de sa durée, au sens où il serait acquis progressivement ou serait plus intense d'être plus long (*Le système stoïcien et l'idée de temps*, 1953[42]). Tout de même, si l'on peut progresser vers la perfection morale, on ne l'atteint pourtant pas par une accumulation d'efforts. Chaque événement qui dans la trame universelle arrive à son heure sera une *occasion propice* - tel est finalement le sens que prendra le mot *kairos* - pour l'initiative morale ou le bonheur. Le tout est de saisir cette opportunité dans l'instant. La vie n'est faite que d'une suite d'instants que nous vivons successivement et que l'on peut maîtriser d'autant plus que l'on

[42] Paris, Vrin, 1953.

sait les définir et les isoler exactement[43]. Chaque tâche, ainsi, a son "bon moment" qu'on ne doit pas laisser passer, car il n'attend pas le loisir de celui qui l'exécute, lit-on dans *La République* de Platon (entre 385-370 av. JC, II, 370b & 374c).

Les Grecs représentaient le *kairos* sous les traits d'un jeune homme portant des cheveux bouclés sur le devant et chauve sur le derrière du crâne, pour exprimer qu'il faut saisir l'instant tel qu'il vient à soi. Protagoras passe pour avoir le premier conceptualisé la notion de *kairos* (*Les présocratiques*, 1988, p. 983[44]), que l'on rencontre également chez les Pythagoriciens (d'après Jamblique, p. 596-597), chez Démocrite (Fragment CCXXVI, p. 900) et surtout dans la médecine hippocratique[45]. Aristote introduira la notion en morale[46].

A travers un acte, une résolution, toute une vie peut se jouer en un instant. Le temps moral est le *kairos*, l'instant opportun dans lequel l'initiative s'accorde parfaitement avec l'événement parce qu'elle est l'événement : la direction d'une vie. L'instant permet, selon les Stoïciens, de conquérir ce qu'une attente de plusieurs siècles ne saurait à elle seule nous apporter : une totalité, une plénitude, une richesse que l'insensé croit pouvoir capitaliser dans la succession du temps qui s'écoule. *L'instant est le temps achevé*.

De sorte qu'une fois ce bonheur atteint, sa prolongation n'a plus de sens. *L'instant ne peut être que présent. Il rejoint l'éternité en ce qu'il est suspension et épuisement de la durée.* L'instant épuise le temps. Il en dévoile finalement la fugacité, le pur flux impalpable, dès lors que le temps n'est pas nôtre. Le temps alors, quoiqu'irréversible, parait vide. La poésie japonaise offre des exemples frappants de cette vacuité.

Les haïkus

Fixer un instant fugace.

La littérature japonaise a connu un genre de courts poèmes (5 vers de 31 syllabes) vers la fin du VIII° siècle, les *tanka*. Au XV° siècle, ils devinrent par dissociation des strophes les *renga*, ou poèmes en chaîne correspondant à un jeu dans lequel chaque participant devait élaborer une strophe en écho à celle qu'il venait d'entendre et plusieurs poètes le même poème ainsi ; l'ensemble évoquant des impressions fugitives. Finalement, une seule strophe fut retenue (dix-sept syllabes réparties en trois vers : 5-7-5), formant des poèmes laconiques et directs que l'on nomme *haïku* (ou

[43] Voir P. Hadot *La citadelle intérieure. Introduction aux Pensées de Marc Aurèle*, Paris, Fayard, 1992, pp. 150-153, p. 203 & p. 233.
[44] Paris, Pléiade Gallimard, 1988.
[45] Voir L. Bourgey *Observation et expérience chez les médecins de la collection hippocratique*, Paris, Vrin, 1953.
[46] Voir P. Aubenque *La prudence chez Aristote*, Paris, PUF, 1986.

haïkai[47]). Le développement du style *haïku* fut particulièrement l'œuvre de Matsuo Bashô (1643-1694), qui rédigeait ses poèmes dans un langage très simple, évitant les formules littéraires[48].

Le propre du *haïku* est de traduire les choses dans leur naturalité, sans les commenter :

Pleine lune
Et sur les nattes
L'ombre d'un pin.

ou encore :

Avec un taureau à bord
Un petit bateau traverse la rivière
A travers la pluie du soir.

Le *haïku* est composé spontanément et veut contenir en lui tout l'univers. Il fixe un instant fugace : l'odeur des feuilles qui brûlent dans le matin d'un brouillard automnal ; un envol de pigeons dans le soleil sous un ciel orageux ; ou le simple cri d'un oiseau dans la forêt[49]. Bashô définissait ainsi les qualités d'un bon *haïku* : unir un principe de stabilité, d'éternité (*fueki*), comme le silence ou la mer et la notation d'un événement subit et limité dans le temps, voire même trivial, comme le cri d'un oiseau ou le plongeon d'une grenouille.

Vers le milieu du XVIII° siècle, une forme nouvelle de poésie à dix-sept syllabes fut lancée par le poète Senryou et prit le nom de son créateur. Les *senryou* retrouvèrent le sens de la moquerie qu'avaient perdu les *haïkus*. Ceux-ci, néanmoins, furent poursuivis par les poètes Issa (1763-1827) et Masaoka Shiki (1867-1902)[50]. A la fin du XIX° siècle, ils furent même imités en Occident, tandis qu'une école du *haïku* en vers libres apparut au Japon dans les années 20[51]. On aura ainsi des choses comme :

Tout à coup
La morsure de la glace légère
M'a fait bander.

Ou encore, de Terayama Shûji :

S'il pouvait parler
Ce papillon mourant
Qui appellerait-il ?

De nos jours, le *haïku* demeure une pratique sociale au Japon, avec ses courants et ses concours, ses "mots de saison" obligatoires, répertoriés en manuels pour les haïkistes. Il intéresse toujours les poètes contemporains - Tota Kameko, ainsi, ou Ban'ya Natsuishi. Et le genre s'est développé à une échelle internationale. Aux USA, William Carlos Williams, en France, Paul Eluard et Paul Claudel

[47] En fait, le *haïkai* a été appelé *haïku* à la fin du XIX° siècle par Masaoka Shiki, qui renouvela le genre, délaissé sous l'ère Meiji. Voir l'anthologie *Haïku du XX° siècle. Le poème court japonais d'aujourd'hui*, Paris, Gallimard, 2007.
[48] Voir A. Kerven *Basho et le haïku*, Paris, Bertrand-Lacoste, 1995.
[49] Les *haïkus* ont été illustrés notamment par la peinture japonaise de style *haiga* (XVI° siècle), ainsi que par le peintre et poète Yosa Buson (1716-1783) qui, après Bashô, donna une vie nouvelle au *haïku*.
[50] Toutefois, en japonais, les auteurs de *haïku* ne sont pas exactement des poètes (*shijin*) mais des *haijin*.
[51] Voir Etiemble *Du haïku*, Paris, Ed. kwok On, 1995.

ont pratiqué le *haïku*, comme nombre d'autres poètes aujourd'hui[52]. Chez Antonio Machado, on trouve par exemple :

Un oiseau caché dans les branches du parc solitaire rit, l'air moqueur

(*Solitudes Galeries et autres poèmes,* 1889-1907, XXVIII)[53].

Développé à une telle échelle, le *haïku* ne pouvait manquer de prendre des significations nouvelles. Au point parfois, alourdi de mots ronflants, ne plus paraître correspondre qu'à une forme particulière de notation poétique[54]. Loin de cette légèreté qui peut lui permettre de capturer le temps dans sa fugacité.

Les moments d'une vie sans but.

Un *haïku* ne veut rien dire, au sens où il n'exprime rien. Le thème constant de tous les arts zen, note en effet Alan W. Watts, c'est la vie sans but saisie en un instant intemporel (*Le bouddhisme zen*, 1969, p. 200 et sq.[55]). Le *haïku* enregistre un instant éphémère où rien de particulier ne se réalise, ne s'accomplit ni ne s'interrompt. Il tourne l'esprit vers l'absolue tranquillité d'un moment sans limite. C'est là à la fois la force et la faiblesse du *haïku*, dont le nombre contraint de syllabes et la brièveté ne laissent guère de place à l'invention, au jugement, à l'individualité, souligne Arthur Koestler. De là, ces images inlassablement répétées de corbeaux perchés sur une branche, de grenouilles sautant dans une mare et de feuilles d'automne bruissant dans le fossé (*Le lotus et le robot*, 1960, p. 316[56]). Cependant, le *haïku* tourne aussi l'attention vers des états de choses infimes. Le murmure du givre qui fond. Le bruit du pas des abeilles. Le son imperceptible du brouillard. Il s'agit de saisir le monde tel qu'il est, jusque dans ses moindres détails et sensations, ramassés dans un seul instant.

*

Pour certains commentateurs occidentaux, le *haïku* n'a rien à voir avec le zen[57] et il est certain que celui-ci n'intervient guère dans sa pratique courante et même commune au Japon. Par-là, ces mêmes commentateurs veulent mettre en garde contre une surinterprétation conduite, comme pour tout ce qui vient du Japon, au nom d'un « zen » qui n'est qu'un grand fourre-tout d'images et de visions plus ou moins mystérieuses, qui ne sont qu'autant de projections occidentales. En quoi, on est alors conduit à trouver au *haïku* un sens caché ou profond, ce qui en manque précisément la nature. Toutefois, une telle mise en garde renvoie inévitablement au zen…

Un bon *haïku* invite l'auditeur à rencontrer l'un des quatre états fondamentaux de l'état d'esprit zen (*furyu*) dans sa perception des instants sans but de la vie, selon Alan Watts. *Sabi* est la solitude, au sens bouddhique du détachement. La conception des choses selon laquelle celles-ci

[52] Voir J. Antonini (dir) *Anthologie du haïku en France*, Paris, Aléas, 2003.
[53] in *Champs de Castille*, trad. fr. Paris, Gallimard, 1972.
[54] Voir par exemple L. Rey *Haïku* in *Pages d'ombres*, Paris, Gallimard, 2000.
[55] trad. fr. Paris, Payot, 1969.
[56] trad. fr. Paris, Calmann-Lévy, 1961.
[57] Voir notamment R. Sieffert *Le haïkaï selon Bashô*, Paris, Publications orientalistes de France, 1990.

s'accomplissent d'elles-mêmes dans une miraculeuse spontanéité. Percevoir quelque chose dans sa naturalité est *wabi* et *aware* est le moment critique entre l'instant où l'on perçoit avec tristesse le caractère transitoire du monde et l'instant où il apparaît comme la vraie forme du Grand Vide.

Le torrent se cache
Dans les herbes
De l'automne qui s'en va.

Enfin, la soudaine vision d'un inconnu indéchiffrable, de quelque chose de mystérieux et d'étrange, est *yugen*.

*

Suspendre le langage.

Apparemment, par son laconisme même, le *haïku* appelle le sens. Il s'offre comme une allégorie ou un symbole (voire un syllogisme). Mais, note Roland Barthes, le prendre comme tel serait proprement manquer le *haïku*, dont le but n'est pas de provoquer le langage mais de le suspendre (*L'Empire des signes*, 1970, p. 89 et sq.[58]).

Le zen mène la guerre contre la prévarication du sens, écrit Barthes. Il ne s'agit pas d'arrêter le langage sur un silence lourd, plein, éloquent. Ni même sur un vide de l'âme s'ouvrant à la communication divine. Ce qui est posé par le poème n'est pas appelé à être développé. C'est comme une cassure de cette récitation intérieure qui constitue notre personne. Le *haïku* vise à rendre impossible l'exercice le plus courant de notre parole qui est le commentaire. "Les sanglots longs des violons de l'automne", ce vers de Verlaine est presque un *haïku* note en ce sens le présentateur d'une excellente anthologie de *haïkus*. Mais, ajoute-t-il, je regrette déjà le vers suivant ("Bercent mon cœur d'une langueur monotone") qui n'apporte rien[59].

La poésie zen saisit les choses comme événements et non comme substances. Par là même, elle abolit l'instant. Ou plutôt, elle le nie comme passage, comme réalisation ou plénitude et le rend à la vacuité du Tout.

Le pivert
Reste à la même place.
Le jour s'estompe.

Le sens, ainsi, est refusé au réel, comme le note Roland Barthes. La réalité est amincie jusqu'à la pure et seule désignation : c'est ainsi ! Ou mieux encore : Tel ! Le temps n'a plus de moments pour le constituer. Il s'alanguit, s'éternise et s'épuise dans l'instant.

La chronique d'un instant.

Le temps n'a qu'une réalité, celle de l'instant, soutient Gaston Bachelard (*L'intuition de l'instant*, 1931[60]). L'instant, écrit Bachelard, ne coule pas dans un temps objectif dont il

[58] Paris, Champs Flammarion, 1970.
[59] M. Coyaud. Présentation de *Fourmis sans ombre. Le livre du haïku*, Paris, Phébus, 1978.
[60] Paris, Livre de poche/Stock, 1992.

ferait partie. L'instant est le temps. La vie est une discontinuité d'actes. Comme si un accident était à la racine de toute évolution. Ce n'est pas l'être qui est nouveau, qui devient dans un temps uniforme. C'est l'instant qui, en se renouvelant, reporte incessamment l'être à la liberté du devenir.

En un roman bizarre et assez malsain, l'écrivain mexicain Salvador Elizondo s'est attaché à faire la chronique d'un instant (*Farabeuf*, 1965[61]). L'instant de la libération d'un désir inavouable et à peine formulable, mêlant l'amour et la mort, le plaisir et l'effroi. Un désir provoqué par la vision d'une photo de l'exécution d'un supplicié chinois, prise à l'exact instant où celui-ci glisse, dans une "extase" de souffrance, de la vie à la mort (une photo qui fascinait Georges Bataille). Pour se formuler, le désir en appelle à la vérité d'autres instants enfouis, confus, dans la mémoire et qu'il s'agit de rendre prémonitoires : une vague image, un mot dont, en un instant, est faite la mise au point et qui seront autant de signes susceptibles de précipiter la bascule. Alors, tous les moments d'une vie se réarrangent, comme suspendus à la pointe de l'instant où le désir s'affranchit, en un récit capable de cohérence.

*

"Ce qu'il peut y avoir de permanent dans l'être est l'expression non d'une cause immobile et constante mais une juxtaposition de résultats fuyants et incessants, dont chacun a sa base solitaire et dont la ligature n'est que l'habitude qui compose un individu", écrit Bachelard - qui tout au long de son texte, s'en prend à Henri Bergson, pour lequel l'inaptitude de l'intelligence à saisir la durée se dévoile au contraire particulièrement dans le découpage du temps en instants (voir 2. 2. 6.).

L'individu n'est pas aussi défini qu'on croit, poursuit Bachelard. En fait, on ne devrait parler ni de l'unité ni de l'identité du moi en dehors d'une synthèse réalisée d'instant en instant. Chaque individu est une somme variable d'habitudes recensées mais qui ne profitent pas simultanément de tous les instants, de sorte que l'unité d'un être paraît toujours touchée de contingence. Elle est le propre d'un instant et telle est aussi sa liberté, car elle est alors reportée et doit être reconquise d'instant en instant. Nous n'existons vraiment que par la grâce d'un instant.

C'est là une conversion du regard, qui donne au temps une profondeur nouvelle et à l'instant une réalité singulière. L'instant est nôtre mais, aussi bien, un instant nous possède, nous découvre autre. La reconnaissance de cette puissance de l'instant sera tardive néanmoins - en art notamment.

La grâce de l'instant.

Watteau.

"L'hésitation, l'indécision, les velléités contradictoires, les impulsions tout au plus assez fortes pour permettre au corps d'ébaucher un mouvement, c'est là ce qu'aime Watteau", souligne Bernard Groethuysen (*Philosophie de la révolution française*, posthume 1956, pp. 98-99[62]). "L'amant attire à lui l'aimée. Elle le laisse faire tout en lui résistant : deux mouvements opposés. En même temps son attention est attirée par quelque objet. Elle le regarde. Son corps esquisse un troisième mouvement. Et enfin, à force de prendre tant d'attitudes différentes, elle est sur le point de perdre l'équilibre". Comme le Titien avant lui, comme Degas plus tard, Jean-Antoine Watteau (1684-1721) peint des actions esquissées, des gestes encore à peine engagés, des corps arrêtés un instant dans leur élan. Ces attitudes que l'on ne garde jamais longtemps retiennent tout particulièrement son attention.

Watteau eut beaucoup d'imitateurs mais peu de succès critique en France au XVIII° siècle. Plus tard, la mélancolie de ses tableaux le rendit cher aux Romantiques, qui en firent le témoin d'un XVIII° siècle libertin et galant que sa mort prématurée ne lui avait pourtant pas permis de connaître. Mais, en son siècle, Diderot ne cachait pas son mépris à son égard. Et il n'était pas le seul. Ses compositions passaient pour n'avoir aucun objet. Trop fugitives et livrées à l'indécision de l'instant, on leur reprochait de n'exprimer aucune passion et d'être ainsi *dépourvues d'action*[63]. Et l'on avait raison. Watteau ne peint de l'action que ses interstices. Il ne la campe qu'un instant arrêtée. Dans *La récréation galante*[64], il saisit ainsi la pose d'un orchestre entre deux morceaux. Les postures viennent de se rompre et les corps se relâchent, un moment, indécis.

[61] trad. fr. Paris, Gallimard, 1969.
[62] trad. fr. Paris, Tel Gallimard, 1956.
[63] Voir l'introduction de P. Rosenberg in *Tout l'Oeuvre peint de Watteau*, Paris, Flammarion, 1970.
[64] A la Gemäldgalerie de Berlin.

Jamais Watteau ne fixe ni ne consacre le tragique de l'instant, comme Greuze (1725-1805) pourra le faire plus tard avec emphase[65] (en recueillant les acclamations de Diderot).

De l'instant, Watteau ne retient que le frémissement, le *passage* ; la grâce en un mot, dont il contribua largement - les Goncourt l'ont bien noté (*L'art du XVIII° siècle*, 1859-1875[66]) - à renouveler la perception. Non plus le charme rigoureux et solide, la perfection de marbre à l'antique mais le rien qui habille la femme d'un agrément. Les plis d'une robe sous le poids d'un corps léger qui s'affaisse. Quelques cheveux blonds, brouillons, que le chapeau découvre. Dans l'instant, Watteau saisit cette chose subtile qui est le sourire d'une ligne, l'âme d'une forme. Les heureuses fortunes du maintien et la coquetterie dévoilée des gestes. Toutes les mimiques de la grâce, qui sont comme une sorte de recréation spontanée. Watteau peint les êtres tels qu'en eux-mêmes un instant les change[67].

[65] Voir par exemple *Le fils ingrat* (1765) au Louvre.
[66] Paris, Hermann, 1967.
[67] Voir particulièrement *Gilles*, au Louvre, comme engourdi d'une stupeur fugace.

Il y a chez lui une attention à l'instant qui annonce déjà la photographie. Et l'on peut considérer que cette poésie du glissement instantané, qui révèle et transfigure tout à la fois, a trouvé un prolongement particulier dans "l'instant décisif" du photographe Henri Cartier-Bresson[68], lequel exercera une influence considérable sur la photographie contemporaine (et particulièrement sur le photojournalisme).

L'instant décisif de Cartier-Bresson.

Comme Martin Munkacsi un peu avant lui, Cartier-Bresson cherche la vision rapide, "l'image volée" capable de synthétiser une situation poétique entière (l'influence du surréalisme est ici patente).

Du célèbre cliché de Munkacsi d'enfants jouant sur les bords du lac Tanganyika (1930), Cartier-Bresson dira avoir reçu comme une étincelle. Comprenant que la photographie peut atteindre l'éternité par l'instant. Dès lors, il voudra prendre des photos comme des flagrants délits.

Cartier-Bresson recherche la quasi-simultanéité de la détection du sujet, de la visée et du déclenchement. En même temps, le photographe ne décide pas de l'instant propice mais se laisse saisir par lui. Son art réclame, affirme-t-il, une disponibilité totale du corps et de l'esprit, qu'il rattache à la pratique zen du tir à l'arc.

[68] *Le moment décisif* est le titre donné à l'édition américaine de son premier ouvrage *Images à la sauvette* (Paris, Verve, 1952).

Au tirage, Cartier-Bresson ne recadre jamais ses photos. L'image doit trouver en elle-même sa raison d'être, figée dans un instant singulier et presque en dehors des circonstances réelles de la prise de vue. Ce qui ne la dispense pas d'obéir à de stricts principes géométriques de composition (nombre d'or, etc.). Comme Watteau, Cartier-Bresson ne fige pas l'instant mais en souligne la fragilité et l'indécision, pour mieux en saisir la liberté. La photographie veut ainsi être l'instrument d'une lucidité supérieure[69]. Une dimension intéressante à introduire dans la pratique photographique si l'on souligne que la démarche d'un Cartier-Bresson est finalement assez proche de celle qui inspire les photographes du dimanche ; pour lesquels une bonne photo est un petit miracle et dépend bien plus de la chance que de l'art. La chance qui permet de figer une émotion fugitive ou qui surprend la rencontre improbable et cocasse de deux réalités hétérogènes (le gag).

Un instant peut nous transformer, c'est-à-dire non pas nous refaire de rien mais nous révéler autre que ce que paraissions être. Dans l'instant, le temps devient regard.

En soi, l'histoire est inutile, écrit Bachelard. Ce qui persiste, c'est toujours ce qui se régénère. C'est le nouvel éclairage que le temps jette sur nous-mêmes. "L'individu est une somme d'accidents et cette somme est accidentelle". La permanence du caractère, ainsi, n'est que ressemblance. "Nous sommes des reflets de reflets et notre courage est fait du souvenir de notre décision". *Nous ne nous conservons jamais tout entier parce que nous n'avons jamais été conscients de tout notre être. Nous ne sommes jamais nous-mêmes que dans l'étroite et décisive limite d'un instant*. Il n'y a pas de nous-mêmes invariable dans la continuité. Un instant peut suffire à nous défaire.

Et sans doute faut-il beaucoup de sagesse ou de résolution pour que cette opportunité nous soit une jouissance, comme le voulaient les Stoïciens. Car cette opportunité souligne surtout notre incertitude et l'effroyable précarité de notre liberté - qu'un rien suffirait à anéantir dans l'instant. Elle révèle que le dernier instant l'emporte.

[69] Voir J-P. Montier *L'art sans art d'Henri Cartier-Bresson*, Paris, Flammarion, 1995, p. 64.

Alors même qu'avec le temps, chaque nouvel instant augmente le compte de nos erreurs, de nos disgrâces et nous fait constater notre vieillissement.

*

L'instant met en jeu notre continuité d'être, tout de même qu'il ouvre une béance entre l'avant et l'après du changement, dont il rend problématique la continuité.

L'énigme du continu en effet est liée à la notion même de mouvement, dont le commencement et la fin sont plus que de simples éléments ponctuels. Ils sont gros d'une réalité à venir ou passée. De sorte qu'on ne peut plus discerner quand les choses effectivement changent, alors même que le mouvement, s'il intervient dans le temps, doit pourtant bien se réduire à une suite d'instants dont le décompte infini menace d'abolir la continuité. Penser l'instant impose de réconcilier l'infini et le continu. C'est ce que fit le calcul de l'infini.

*

* *

II - Le calcul de l'infini

2. 3. 6.

Comment les choses peuvent-elles se prolonger dans le temps ? Comment un mouvement peut-il se former dans la durée ? Les choses peuvent être composées d'éléments discrets ou bien sont divisibles à l'infini. Dans le premier cas, qu'est-ce qui assure la liaison entre leurs éléments, si ceux-ci sont discrets, c'est-à-dire distincts les uns des autres ? Dans le second cas, comment les choses peuvent-elles être telle ou telle chose ? Sur quoi repose leur réalité si elles sont faites d'une poussière indéterminée de matière ? Ces questions furent particulièrement posées par la découverte que certaines réalités peuvent être constituées d'éléments dont le rapport n'est jamais juste : ainsi du côté du carré à sa diagonale. Et fort longtemps, la réponse à ces questions consista à assurer que toutes les choses sont bien unes et composées d'un certain nombre fini d'éléments. Π, ainsi, qu'on ne concevait pas comme un irrationnel et même pas comme un nombre mais comme une grandeur qui doit bien avoir une fin puisqu'elle peut être tracée.

Communément, l'idée de continuité traduit cette certitude que les choses ont bien une *réalité, qu'elles sont bien unes quoiqu'elles rassemblent une multiplicité d'éléments et le continu est ce qui permet mentalement de forcer ce rassemblement de discontinuités ; le saut, passablement mystérieux, d'une forme à une autre. Il est ce qui nous permet de considérer comme non-problématique l'idée que d'une réalité particulière, comme celle d'un grain de sable, on puisse en arriver à une autre réalité singulière, le tas de sable, par une accumulation indéterminée de grains, en évacuant comme oiseuse la question de savoir à partir de quel nombre exact de grains on a bien un tas.*

Très longtemps, le calcul intégral ne fut guère différent d'une telle approche. Ses méthodes se ramenaient au refus de l'infini actuel, comme si des réalités comme Π pouvaient être positivement composées d'une infinité d'éléments. Jusqu'à la formation du concept mathématique de convergence, en fait, on ne conçut pas le continu. On ne voulut pas considérer en effet qu'une grandeur peut ne pas être

composée d'éléments distincts mais peut recevoir, à travers un calcul, autant d'éléments qu'on le souhaite. Dès lors que se précisa la notion de limite, la continuité put être pensée de manière toute autre. Mais ce point de vue, à vrai dire, n'a jamais rallié tous les suffrages. La formalisation du calcul intégral ouvrit une crise dont les termes débattus furent ceux-là mêmes que la mécanique quantique, plus tard, conduira à reformuler (voir 2. 1. 14.). Qu'est-ce que la réalité ? Ce qui peut être conçu sans contradiction et permet de comprendre l'expérience mais n'est pas forcément représentable ? Ou bien ce dont nous pouvons nous faire une représentation précise, à l'instar des objets de l'expérience ? Une déduction logique peut-elle seule conduire à la vérité ou doit-elle nécessairement demeurer la servante de l'expérience ? Doit-elle être validée par quelque image d'un objet ?

Pour comprendre la nécessité d'un tel débat, il nous faudra poser d'abord A) le problème du continu - notamment à travers les fameux paradoxes de Zénon - puis présenter sous un jour historique B) le calcul infinitésimal, dont nous suivrons alors les prolongements quant aux notions de continuité et d'infini à travers C) l'idée de transfini.

A) Le problème du continu

2. 3. 7.

Les Pythagoriciens et la découverte des grandeurs incommensurables.

Philosophiquement, le problème du continu est né des difficultés soulevées par la découverte des grandeurs incommensurables par les Pythagoriciens. Ceux-ci pensaient que l'essence de toute chose se réduit à un nombre et que toutes les choses se distribuent les unes en regard des autres selon des rapports numériques simples et entiers.

C'est là sans doute une idée vieille comme le monde : qui n'a jamais été frappé par les coïncidences de chiffres qui peuvent exister entre les dates des événements importants de sa vie, avec le nombre de lettres de son nom, etc. ? Qui n'a pas *son* chiffre ? Chaque être à son nombre expliquera le pythagoricien Eurytos[70].

Cette conviction poussa les Pythagoriciens à aborder les phénomènes naturels en termes mathématiques. Remarquant notamment qu'un vase plein d'eau et un autre à moitié plein frappés simultanément produisent un accord d'octave (deux sons dont la fréquence de l'un est la moitié de celle de l'autre), ils en déduisirent que le rapport 1/2 est constitutif de cet accord - ce qui se vérifie quelle que soit la forme des matériaux frappés (deux cordes dont l'une est deux fois plus courte que l'autre par exemple) - et que tout dans l'Univers se ramène ainsi à des proportions.

Or les Pythagoriciens concevaient les nombres comme composés d'unités élémentaires (4 est fait de 1+1+1+1, etc.). Lorsqu'ils découvrirent qu'il est impossible d'exprimer par un nombre entier le rapport du côté du carré à sa diagonale (ce rapport vaut $\sqrt{2}$), cela menaçait tellement de mettre à bas leur doctrine qu'ils scellèrent leur découverte. On a conservé un *Hymne* louant la justice divine d'avoir fait périr celui qui avait mis au jour ce problème !

Pour les Pythagoriciens, une autre découverte semblable était peut-être plus embarrassante encore, celle du rapport irrationnel de la diagonale du pentagone à son côté, laquelle permet de construire un pentagramme (pentagone régulier dont on joint tous les sommets) ou étoile à cinq branches, qui était leur emblème (et qui a conservé jusqu'à nos jours une aura ésotérique).

Pour les Grecs, la non-congruence entre nombres et grandeurs - que le rapport de deux grandeurs ne soit pas un nombre juste - ne pouvait représenter qu'une parfaite aberration. Dans la mesure où l'on concevait la ligne comme une somme de points discrets, comment expliquer que la diagonale ne soit pas dans un rapport simple avec le côté ? Tout

[70] Voir *Les présocratiques*, Paris, Pléiade Gallimard, 1988, p. 514.

devrait se réduire au rapport de deux nombres finis. Comment pouvait-on rencontrer dans la plus harmonieuse des figures, le carré, un rapport géométrique qui ne se laisse pas ramener à une somme exacte de points ?

Le théorème de Pythagore.

Faut-il rappeler le théorème de Pythagore ? Si la diagonale d'un carré qui a l'unité pour côté est prise comme côté d'un nouveau carré, l'aire de celui-ci est égale à 2. Pour trouver la longueur de la diagonale, il faudrait donc trouver un nombre dont le carré soit 2. Or, soit le rapport d/c de la diagonale au côté, le théorème de Pythagore ($d^2 = 2c^2$) démontre que d est paire, que d et c sont premiers entre eux et que c est impair. Pourtant, la parité de d permet d'exprimer le théorème sous la forme : $4(d/2)^2 = 2c^2$ ou $2(d/2)^2 = c^2$, ce qui entraîne la parité de c. Donc, si d et c sont commensurables, c est à la fois pair et impair, ce qui est inconcevable. Géométriquement, néanmoins, la grandeur est bien construite et déterminée. Il convient ainsi de souligner la parenté du paradoxe avec ceux de Zénon (voir ci-après), lesquels montrent essentiellement qu'une grandeur n'est composée ni d'un nombre fini, ni d'un nombre infini d'éléments.

Notons enfin que la précédente démonstration par l'absurde n'était sans doute pas celle de l'époque, bien qu'on trouve chez Aristote la mention du fait que supposer la diagonale (Aristote ne précise pas s'il s'agit de celle du carré) reviendrait à confondre le pair et l'impair.

Dès l'aube de la réflexion philosophique, les fameux paradoxes de Zénon d'Elée généralisèrent à toute grandeur l'idée d'incommensurabilité.

Les paradoxes de Zénon

Les quatre arguments de Zénon forment un dilemme[71]. Ils nous ont notamment été rapportés par Aristote (*Physique*, VI, 9[72]). Les deux premiers veulent montrer le caractère impensable de la divisibilité à l'infini du temps et de l'espace. Les deux autres arguments, au contraire, mettent à bas l'idée selon laquelle le temps et l'espace seraient composés d'éléments indivisibles et donc finis, tels que points et instants.

Les deux premiers arguments : contre la divisibilité infinie du temps et de l'espace.

[71] Excellente présentation in V. Brochard *Etudes de philosophie ancienne et de philosophie moderne*, 1926, Paris, Vrin, 1954, I & II. L'auteur montre que les quatre paradoxes sont logiquement irréprochables et suggère dès lors de n'en plus parler que comme autant "d'arguments" et non paradoxes, comme s'il s'agissait de simples sophismes. Voir également W. C. Salmon *Zeno's paradoxes*, 1971, Indianapolis, Hackett, 2001.
[72] trad. fr. en 2 volumes, Paris, Les Belles Lettres, 1983.

1) *la dichotomie* : si le temps et l'espace sont infiniment divisibles, le mouvement est impossible car, avant qu'un mobile ait atteint le but de sa trajectoire, il devrait en avoir parcouru la moitié de la distance et auparavant la moitié de cette moitié et ainsi de suite à l'infini.

2) *Achille et la tortue* : un coureur plus rapide ne peut en rattraper un autre même plus lent que lui car il faut qu'il parvienne au point d'où est parti celui qui le précède. Or, puisqu'à chaque point de la trajectoire d'Achille correspond un point avancé de la trajectoire de la tortue et ceci à l'infini, leur nombre doit nécessairement être égal. Il est donc impossible que le chemin parcouru par Achille dans le même temps soit plus grand que celui parcouru par la tortue.

Les deux autres arguments : contre l'indivisibilité infinie du temps et de l'espace.

3) *La flèche* : si l'on admet que temps et espace se composent d'éléments indivisibles en nombre fini, tels que des points et des instants, une flèche qui vole est à chaque instant et à chaque point de sa trajectoire immobile. Car dans l'instant, le mobile est en repos ou en mouvement. Mais s'il est en mouvement, la flèche, en un instant, change de position et l'instant peut être divisé. Si le temps est formé d'instants indivisibles, la flèche est donc toujours en repos, dans "un espace égal à elle-même". Elle n'atteindra jamais la cible.

4) *Le stade* : trois lignes égales, composées du même nombre d'éléments indivisibles se trouvent dans un stade. L'une est immobile et les deux autres se meuvent parallèlement à elle en sens inverse. Lorsque les lignes se recouvrent, la moitié de l'une est égale au deux autres car dans un instant déterminé un seul et même élément spatial doit passer devant un ou deux éléments spatiaux et par conséquent être égal aussi bien à un qu'à deux éléments.

Soit en effet une ligne de points A1, A2, A3, A4 immobiles. Soient deux autres séries B1, B2, B3, B4 et C1, C2, C3, C4 disposées ainsi :

A1, A2, A3, A4

B1, B2, B3, B4

C1, C2, C3, C4

Les deux séries B & C se meuvent en sens contraire avec une vitesse égale, de sorte que B4 et C1 arriveront au même moment l'un à A4 et l'autre à A1 :

A1, A2, A3, A4

B1, B2, B3, B4

C1, C2, C3, C4

Dans le même temps, cependant, B4 sera passé devant tous les C et C1 devant tous les B et chacun des deux seulement devant la moitié des A. Il faut donc, soit que B et C ne se croisent pas et alors le mouvement est impossible, soit que dans un seul instant indivisible deux positions soient occupées par les deux mobiles l'un en regard de l'autre. Mais alors l'instant ne sera pas indivisible.

*

Le problème du continu.

Zénon utilise deux idées, celle du lieu et celle de l'instant, qui ne seront vraiment conceptualisées qu'avec Aristote (voir ci-dessus). Affirmer le mouvement, c'est affirmer qu'un objet occupe successivement plusieurs lieux. Or les lieux peuvent être conçus de deux manières. Ou bien ils forment un tout continu ou bien ils sont composés d'éléments distincts. Mais, dans le premier cas, l'espace est divisible à l'infini et, pour passer d'un lieu à un autre, un mobile doit passer en un temps fini en une infinité de lieux. Il ne parviendra jamais à destination. *A contrario*, s'il existe des points indivisibles, le mouvement est tout aussi inconcevable, puisqu'en un seul instant indivisible, le mobile devrait couvrir deux points de lieu distincts. Il ne peut passer d'un lieu à un autre et il ne parviendra jamais à destination.

Le mouvement, soulignent les paradoxes de Zénon, divise le temps et le lieu dans lesquels il s'accomplit. Mais comment, à partir d'une série de divisions, inépuisable ou non, peut-on concevoir un mouvement ? *Le problème est celui-même du continu*. Les quatre paradoxes, note Alexandre Koyré, invitent à considérer que le continu n'est pas l'unité d'une multiplicité et que cette propriété presque inexprimable fait que nous ne pouvons le saisir (*Remarques sur les paradoxes de Zénon*, 1922[73]). Le continu renvoie à un problème véritablement ontologique. Il a rapport à la constitution même de l'être. Tel ne pouvait qu'être le sens profond de ces paradoxes, formulés par un philosophe éléate comme Zénon, qui voulait sans doute venger Parménide (voir 1. 2.) des railleries dirigées contre lui et réduire à l'absurde les thèses - que lui opposaient notamment les pythagoriciens - qui affirmaient la réalité du mouvement et du devenir[74].

Le même débat réapparaitra en Inde, opposant les logiciens brahmaniques, les Naiyayika, réalistes et substantialistes, concevant des sortes de points-instants ou *dharma*, engendrant la série des apparitions et disparitions phénoménales du devenir, à des philosophes bouddhistes idéalistes comme Nagarjuna, fondateur de l'Ecole du Milieu (*Stances du milieu par excellence*, III° siècle[75]).

Le continu est-il un infini actuel ou seulement potentiel ?

Le problème du continu est celui de la constitution de l'être. Autour de nous, les choses sont apparemment faites toutes d'une pièce mais on peut les diviser en différentes parties. Dès lors qu'est-ce qui fait les choses paraître une et de quoi sont-elles faites ? D'un certain nombre d'objets ou d'éléments, peut-on naturellement penser. Mais de combien ? L'opération qui les divise paraît pouvoir être indéfiniment reproduite. Une ligne se décompose en points. Mais on ne peut constituer une ligne avec des points, car leur sommation devrait être infinie. En divisant la durée, de même, il devient impossible de comprendre comment une heure peut passer, écrivait Spinoza (*Lettre à Louis Meyer*, 20

[73] in *Etudes d'histoire de la pensée philosophique*, Paris, Tel Gallimard, 1971. Cet article présente quelques-unes parmi les innombrables réfutations des paradoxes. Sur ce point, voir aussi M. Caveing *Zénon d'Elée. Prolégomènes aux doctrines du continu. Etude historique et critique des Fragments et Témoignages*, Paris, Vrin, 1982.
[74] Voir P. Tannery *Pour l'histoire de la science hellène*, 1887, Paris, Gauthier-Villars, 1930.
[75] trad. fr. Paris, Gallimard, 2002.

avril 1663[76]). La division met en soupçon l'idée même d'objet, lequel éclate à travers elle en une multitude d'autres objets et ceux-ci à leur tour. Et cette infinité, réciproquement, paraît interdire de recomposer l'objet car quel est le principe d'agrégation de ses parties ?

Le problème du continu, dès lors, pose l'alternative suivante :

> 1) la divisibilité que l'on peut appliquer indéfiniment aux choses ne révèle pas leur réalité. Si les choses sont effectivement divisibles, ce doit être en un nombre fini d'éléments - par là même discrets.

Ou bien :

> 2) tout être représente un infini actuel et non seulement potentiel comme dans l'option précédente.

Jusqu'au XVII°, jusqu'à la formalisation du calcul infinitésimal, la première option s'imposa seule, la seconde étant à peine pensable[77]. C'est que tout nombre paraissait répondre à la mesure d'une réalité représentable, même ces nombres irrationnels qui, comme π, paraissent ne jamais vouloir s'arrêter. On ne les appelait pas des nombres mais des symboles. Mais, comme les nombres, ils passaient pour représenter des grandeurs délimitées. 22/7 fut la valeur de π, proposée par Archimède, qui fit autorité dans toute l'Antiquité.

L'irrationalité de π (*i.e.* : le fait qu'il ne peut s'écrire sous la forme d'une fraction) ne fut démontrée qu'en 1761 par Johann Heinrich Lambert.

De sorte que si les Grecs rencontrèrent l'infini mathématique sous la problématique du continu - comment ce qui est un peut-il paraître composé d'un nombre indéfini d'unités ? - leur conception géométrique du nombre leur permit de l'ignorer.

Ce point doit être souligné, car il n'est pas toujours aperçu. *On présente assez souvent, en effet, la méthode d'exhaustion comme l'ancêtre du calcul infinitésimal, alors qu'en son principe même, elle en représente pratiquement l'opposé*. L'infini, les Grecs le fuirent. Il ruinait, nous l'avons vu, leur conception du nombre, de l'unité.

* *

B) Le calcul infinitésimal

[76] *Œuvres complètes*, trad. fr. Paris, Pléiade Gallimard, 1954.
[77] Sur le retour actuel à une vision discrète des éléments physiques, voir V. Ardourel *Du calcul sur ordinateur à la mécanique discrète*, Paris, Vrin, 2018.

2. 3. 8.

La méthode d'exhaustion d'Euclide.

La méthode des aires et la théorie des proportions que l'on trouve dans les *Eléments* d'Euclide (vers 300 av. JC[78]), permettent de comparer entre elles des figures rectilignes ainsi que certains solides.

Au X° Livre de ses *Eléments*, Euclide présente dans le même esprit une méthode que le mathématicien Grégoire de Saint-Vincent nommera au XVII° siècle méthode "d'exhaustion", c'est-à-dire d'épuisement.

Archimède affirmait que cette méthode était due à Eudoxe de Cnide (IV° siècle av. JC), dont on s'accorde effectivement à penser que les traités (perdus) ont servi de point de départ à certains livres des *Eléments*.

Pour les Grecs, mesurer une aire ne consistait pas tant à associer un nombre et une grandeur qu'à comparer des surfaces entre elles, à montrer leur égalité, c'est-à-dire à trouver leur rapport. La méthode d'exhaustion était ainsi un moyen d'aborder le rapport de grandeurs géométriques en un nombre *fini* de divisions successives de l'une par l'autre.

Si deux polyèdres ont même volume, peut-on les décomposer à l'aide des mêmes pièces polyédriques en nombre fini ? Sont-ils, en d'autres termes, équidécomposables ? Euclide montre qu'on peut diviser un prisme à base triangulaire en trois pyramides et, en comparant celles-ci deux à deux, constater qu'elles ont même hauteur et que leurs bases sont équivalentes. Mais comment prouver que deux pyramides de même hauteur sont dans le même rapport que leurs bases ? Ce découpage d'une pyramide, en effet, paraît pouvoir se prolonger indéfiniment. Puisque la division n'est pas achevée et puisqu'on ne peut exhiber des égalités de volumes, on contournera la difficulté en raisonnant par l'absurde sur des inégalités. En faisant diminuer indéfiniment l'écart entre les deux volumes, on montrera que le rapport de leurs hauteurs est le même que celui de leurs bases.

Pour montrer que P et P' ont même volume, on construit à l'intérieur de P un solide S de sorte que P-S soit aussi petit qu'on le désire. Et de même S' dans P'. On montre alors que les deux hypothèses $P< P'$ ou $P>P'$ mènent à des contradictions. On réduit à une différence infinitésimale l'approximation du volume afin d'éviter une sommation indéfinie. C'est, en quelque sorte, le paradoxe de Zénon inversé : "enlevons à une grandeur plus de sa moitié, puis au reste plus de sa moitié, etc. ; on peut recommencer ainsi jusqu'à ce que la grandeur restante soit plus petite que toute grandeur donnée" (X, proposition I). On raisonne ensuite par l'absurde. Supposons $P<P'$, on définit S' de volume connu tel que $P'-S'<P'-P$, de sorte que $S'>P$. On peut alors

[78] trad. fr. en 4 volumes, Paris, PUF, 1990-2001.

construire S dans P de la même façon que S' et de même volume. Mais alors, il suit que S=S'<P, ce qui est contradictoire. En raisonnant de façon inverse avec S, on montre également que P>P' est contradictoire.

NB : la démonstration du théorème repose sur une propriété introduite à titre de définition dans le IV° Livre (déf. 4) des *Eléments* : "deux grandeurs sont dites comporter un rapport lorsque, étant multipliées, elles peuvent se dépasser l'une l'autre".

La méthode d'exhaustion, ainsi, n'opère jamais que dans le fini. Elle est faite pour dispenser de sommer des quantités dont le nombre paraît indéfini. Bien qu'on soutienne souvent le contraire[79], ce n'est pas une méthode de découverte qui, à terme, allait donner le calcul infinitésimal.

Archimède.

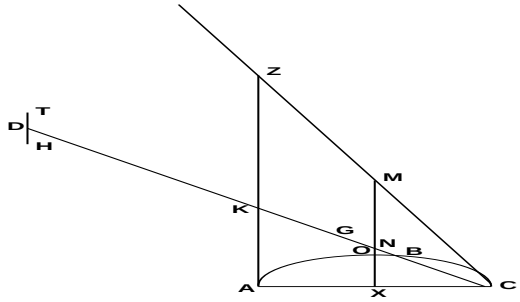
Usant de cette méthode, Archimède parviendra à déterminer la quadrature de nombreuses figures, c'est-à-dire à mesurer leur surface comme si celle-ci était étalée dans un plan. Dans sa *Lettre à Eratosthène sur la Méthode*[80], il prend l'exemple de la parabole, première aire dont il ait réussi la quadrature exacte.

Mais, pour résoudre ce genre de problèmes géométriques, Archimède n'hésite pas à recourir à des procédés de statique dont l'introduction dans le calcul des aires est d'une portée considérable.

Archimède établit ainsi l'équilibre entre un segment de droite arbitrairement choisi sur une figure parabolique et un autre segment placé à l'autre bout d'un levier imaginaire. Puis il considère la figure comme l'agrégat de tous les segments de droite qu'on peut y découper.

Soit un segment de parabole ABC. Menons par A la parallèle AZ à son diamètre et en C la tangente CZ. XM, parallèle au diamètre, coupe la base en X, la courbe en O et la tangente en M. On sait par ailleurs que OX.AC = AX.XM, ou encore que OX.KC = KN. XM. Cette relation suggère une pesée. Portons sur BK, DK = KC et plaçons XO en D. Ce segment équilibrera MX, d'après les lois du levier. Mais tous les XO forment l'aire du segment de parabole, tous les MX forment celle du triangle ACZ. Donc l'aire du segment, placée en D, ou ayant son centre de gravité en D, équilibre celle du triangle AZC resté en place, donc ayant son centre de gravité en G, au tiers de KC à partir de K. D'où l'on tire que l'aire du triangle est le triple de celle du segment.

[79] Voir par exemple A. P. Youschkevitch *Remarques sur la méthode antique d'exhaustion* in (collectif) *Mélanges Alexandre Koyré*, Paris, Hermann, 1964, I.
[80] *Œuvres complètes*, Paris-Bruxelles, 1921.



On le voit, Archimède introduit une considération toute nouvelle : il assimile une aire à une somme de segments rectilignes et un volume à une somme de sections planes ; *soit celle d'une grandeur en général à la somme d'une infinité d'indivisibles. Il s'agit là sans doute de la toute première démarche proprement infinitésimale*. Pour la première fois, une grandeur est positivement formée d'éléments en nombre indéfini.

Méthode qu'Archimède, cependant, ne semble guère avoir goûtée d'un point de vue théorique. Dans son traité sur *La quadrature de la parabole*, il en revient à la méthode d'exhaustion *stricto sensu*. Il ne décompose plus le segment de parabole en une infinité de droites mais lui inscrit et lui circonscrit deux séries de trapèzes (*i.e.* : le volume en question est plus grand que les premières et plus petit que les secondes).

Mais Archimède ne renoncera pas pour autant à mêler à la méthode d'exhaustion des procédés de statique. Dans le *Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes*, il insère les volumes à étudier entre deux séries de cylindres inscrits et circonscrits. Il lui est alors loisible de faire en sorte que la différence de ces deux sommes soit équivalente au plus grand cylindre circonscrit. La hauteur de ce cylindre étant indéterminée, il peut devenir plus petit qu'une quantité donnée. Archimède détermine ainsi π jusqu'à 6 décimales. Il faudra attendre Viète pour aller jusqu'à 10 décimales. Ludolph Van Ceulen (*Cyclometricus*, 1621[81]) poussera l'approximation jusqu'à 35 décimales. On raconte que sa femme les fit graver sur sa tombe !

Au total, les méthodes d'Archimède (décomposition en segments infinitésimaux combinée à la méthode d'exhaustion et à l'algorithme d'Euclide des séries de nombres) se rapprochent singulièrement du calcul intégral[82]. Mais elles ne seront redécouvertes qu'à la fin du XVI° siècle, suscitant proprement l'essor du calcul infinitésimal, avec François Viète, l'un des premiers à calculer sur des séries infinies (*Variorum de rebus mathematicis responsorum*, 1593[83]) et surtout avec Bonaventura Cavalieri et sa *Geometria indivisibili* (*Géométrie des indivisibles*, 1635[84]).

---

[81] Nous n'avons pu consulter cette référence.
[82] Pour une exposition de ces méthodes, voir A. M. Wilson *The Infinite in the Finite*, Oxford University Press, 1995, chap. 13.
[83] Turonis, apud J. Mettayer, 1593.
[84] Bononiae, typis C. Ferronii, 1635. A notre connaissance, il n'en existe pas de traduction française complète. Le livre VII est traduit in Kepler *Nouvelle stéréométrie des tonneaux*, diffusion Paris, Blanchard, 1993. Une bonne présentation de la méthode de Cavalieri est donnée par E. Festa « La querelle de l'atomisme, Galilée, Cavalieri et les Jésuites » *La Recherche* n°224, septembre 1990, pp. 1038-1047.

Dans un procédé de quadrature, le rapport du carré au cercle circonscrit étant $2/\pi$, Viète montre que ce nombre est le produit illimité :

$$\sqrt{1/2} \times \sqrt{(1/2+1/2\sqrt{1/2})} \times \sqrt{(1/2+1/2\sqrt{(1/2+1/2\sqrt{1/2})})} \times \ldots$$

Il s'agit là du premier algorithme infinitésimal connu.

Le calcul intégral est né sans l'infini.

De l'infini, Archimède ne parlait nullement. Pas plus que ne le fera Cavalieri, qui écrit dans sa *Géométrie* que ses conclusions sont valables, soit que le continu se compose d'indivisibles, soit autre chose. Toute sa démarche s'enracine encore dans le procédé d'exhaustion qui permet de "sauter" par dessus l'infini et est à ce titre, nous l'avons dit, comme une réponse aux paradoxes de Zénon. De fait, *le calcul intégral est né sans l'infini et, longtemps, se passera très bien de lui, au sens où il n'invitera nullement à considérer l'infini mais représentera, tout au contraire, un procédé commode pour le surmonter, c'est-à-dire pour parvenir à un résultat en se dispensant de compter des éléments inépuisables.* La floraison, dans la première moitié du XVII° siècle, des essais pour résoudre des problèmes de géométrie et de dynamique ne doit donc pas tromper et faire croire à une reconnaissance nouvelle de l'infini.

On peut notamment citer Bartholomaeus Soverus (*Curvi ac recti proportio*, 1630[85]) et Grégoire de Saint-Vincent (*Problema austriacum plus ultra quadratura circuli*, publié en 1647[86]). Grégoire de Saint-Vincent était parvenu à plusieurs résultats significatifs dès 1625 - en montrant notamment clairement qu'une somme infinie de grandeurs peut définir une grandeur finie, qu'il nommait "terminus" - mais l'incendie de Prague ne lui permit pas de faire connaître ses travaux avant 1647.

Comme le note Alexandre Koyré, lorsque Kepler (*Nouvelle stéréométrie des tonneaux*, 1615[87]) identifiera purement et simplement une courbe à une somme de droites infiniment courtes et son aire à la somme de rectangles infiniment nombreux et minces, il pervertira proprement l'esprit de la méthode d'exhaustion, pour se mettre à calculer à partir d'infinitésimaux (*Bonaventura Cavalieri et la géométrie des continus*, 1954[88]). Au nom de l'orthodoxie archimédienne, il s'attirera les foudres d'Alexander Anderson (*Vindiciae Archimedis*, 1616[89]) et de Cavalieri lui-même, dont les indivisibles ne sont nullement infinis et ont une dimension de moins que l'objet qu'ils épuisent.

---

[85] Patavii, ex. typographia Varisci, 1630.
[86] 2 volumes, Antverpiae, apud J. & J. Meursios, 1647.
[87] trad. fr., Paris, Blanchard (diffusion), 1993.
[88] in *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, Paris, Tel Gallimard, 1973.
[89] Parisiis, apud J. Laquehay, 1616.

Anderson n'admet pas que Kepler prenne pour point de départ ce qu'Archimède établit au terme d'une laborieuse démonstration. On ne peut, souligne-t-il, identifier d'emblée le cercle à une infinité de triangles, comme le fait Kepler, sans contredire aux lois de l'intelligence[90]. Prise à la lettre, en effet, la méthode démontrerait l'équivalence, à l'infini, d'une aire avec une autre surface plus petite ou même avec l'une de ses parties[91]. Bref, les paradoxes de Zénon seraient réintroduits : il n'est pas de continuité possible par une décomposition infinie.

*

Les indivisibles de Cavalieri.

Le terme "d'indivisibles", cela a été souligné, est un terme non technique chez Cavalieri, qui ne l'emploie jamais dans ses démonstrations[92].

Pourtant, ces indivisibles s'attirèrent les foudres des Jésuites et firent l'objet de la même réprobation que l'atomisme (voir 2. 1. 11.), notamment à travers les attaques de Mario Bettini, Andrea Tacquet et surtout de Pauli Guldini (Paul Guldin *Centrobaryca* ou *De centro gravitatis*, 1641[93]). Cavalieri appartenait, lui, à la communauté (dissoute en 1668) des Jésuates. Précisons-le, car on fait souvent de lui un jésuite.

Les indivisibles de Cavalieri ne composent pas la figure. Ils *l'épuisent* et ne sont que le produit du découpage de cette figure à l'aide d'une "règle" précise. Le modèle est ici toujours celui de la méthode d'exhaustion. La géométrie de Cavalieri n'est pas infinitésimale. Pourtant, Cavalieri en arrive bien, sans l'exprimer en tant que telle, à l'idée de l'intégrale comme la limite vers laquelle tend une somme de termes quand le nombre de ces termes croît indéfiniment.

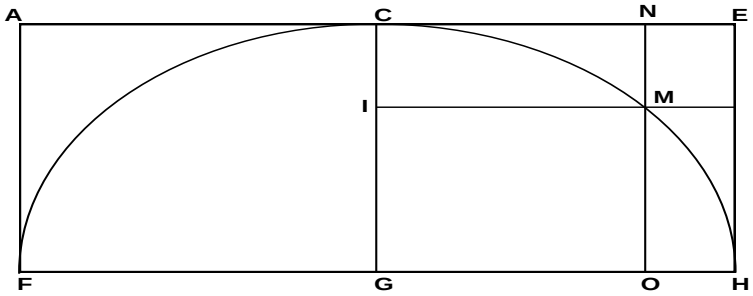
Dans le plan, une figure est entourée par deux droites parallèles et la "règle" est l'une de ces deux droites que l'on fait glisser vers l'autre en conservant sa direction. On compare deux figures planes, ainsi, suivant le principe selon lequel, si les segments de la règle découpés par l'une et l'autre figure restent dans un rapport constant k, alors les surfaces des deux figures sont elles-mêmes dans un rapport k. Un solide, tout de même, sera considéré comme composé par un nombre infini de plans posés parallèlement les uns sur les autres. Mais "infini", ici, veut seulement dire "beaucoup".

Pour quadrer la parabole, on l'encadre par un parallélogramme ayant pour base une droite passant par son sommet. Les lignes tracées entre cette base et la parabole (NM) sont proportionnelles au carré de leur distance au

---

[90] Cité par L. Brunschvicq *Les étapes de la philosophie mathématique*, 1912, p. 161.
[91] Voir J-L. Gardies *Pascal entre Eudoxe et Cantor*, 1984, pp. 43-44.
[92] Voir K. Andersen « Cavalieri's method of indivisibles » *Archive for History of exact Science*, 31 n°4, 1985.
[93] Viennae, formis G. Gelbhaar, 1635-1641.

diamètre de la parabole (CN). L'ensemble des lignes formant CEH est à l'ensemble des lignes formant le segment CMHG dans le rapport de 1 à 3. L'aire du segment de la parabole est égale à 2/3 du parallélogramme correspondant.

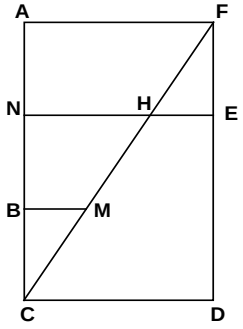


Il s'agit là d'une véritable intégration : soit a = CE et l'aire CEH = $a^3/3$

$\int_o^a x^2\, dx = 1/3a^3$. La formule générale est (selon la notation moderne) :

$$\int_o^a x^n\, dx = (1/n+1)a^{n+1}$$

Tout de même, Cavalieri divise un parallélogramme en deux triangles :



La règle mobile trace deux segments NH et HE qui ne se correspondent aucunement. En revanche HE = BM. Les deux triangles AFC et CDF sont ainsi homologues. La surface d'un triangle (l'ensemble de ses lignes) est égale à la moitié de celle d'un parallélogramme ayant même base et même hauteur.

Cavalieri démontre alors que tous les carrés construits sur les lignes du parallélogramme sont trois fois tous les carrés construits sur les lignes du triangle, à condition de prendre les lignes parallèles entre elles et les carrés parallèles entre eux. Or, tous les carrés construits sur le parallélogramme remplissent un parallélépipède et tous les carrés construits sur le triangle une pyramide. Ce résultat vérifie la propriété qu'Euclide dégageait par la méthode d'exhaustion : le volume d'un parallélépipède est trois fois celui de la pyramide qui a même base et même hauteur

Cavalieri montre enfin, plus généralement, pour une courbe $y = x^2$, que l'aire S comprise entre cette courbe, l'axe des abscisses et une ordonnée correspondant à l'abscisse a, est :

$$S = a^{m+1}/m+1$$

En langage moderne, S est l'intégrale définie :

$$\int_o^a x^m\, dx = a^{m+1}/m+1$$

Avec dx = aire d'un segment indivisible.

Cavalieri démontre ce résultat pour m = 1, m = 2, m = 3 et m = 4 mais le généralise de façon douteuse pour tout m entier positif. C'est Fermat qui parviendra à démontrer la formule ci-dessus[94].

Cavalieri ne publiera ses résultats qu'en 1647. Pierre Fermat en présentait de manière rigoureuse la démonstration générale dès 1635 et l'étendait avant 1638 aux puissances fractionnaires positives, suivi de près par Gilles Roberval. C'est qu'en France, indépendamment de Cavalieri, Descartes, Fermat et Roberval s'étaient mis eux-aussi à carrer les paraboles $y = ax^m$, puis les paraboles plus générales $y^p = ax^m$.

Toutes les techniques d'intégration se rattachaient alors directement à Archimède, dont on ne connaissait que les exposés synthétiques et non la méthode (la *Lettre à Eratosthène* ne sera retrouvée qu'au début du XX° siècle). De sorte que tous crurent de bonne foi innover et que se multiplièrent les accusations de plagiat.

*

L'avancée réalisée par Cavalieri consiste avant tout à avoir montré que les rapports des figures géométriques entre elles sont les mêmes que ceux de leurs éléments. Et cela, note Koyré, sans passage à la limite, c'est-à-dire sans décomposition infinitésimale. Le fondement de sa méthode tient à cette proposition : "les grandeurs continues vérifient la même proportion que leurs indivisibles".

Ce point fit l'objet d'une dispute entre Cavalieri et Galilée. Ce dernier soutenait que, dans l'infini, les notions de "plus grand" et de "plus petit" perdent toute signification (*Discours concernant deux sciences nouvelles*, 1638, Première journée[95]). Cavalieri lui répond (*Lettre du 22 mars 1622*) que les agrégats ont simplement rapport entre eux. Multipliés, ils peuvent se dépasser mutuellement et cette proportionnalité entre les agrégats se transmet aux grandeurs continues sur lesquelles on découpe les lignes qui composent les agrégats (*Géométrie des indivisibles*, livre II, proposition 3)[96]. Au fond, Cavalieri ne se soucie pas de l'infini. Et l'interprétation qu'un siècle plus tard D'Alembert donnera du calcul infinitésimal ne sera guère différente en substance (voir ci-après).

Par la suite, et jusqu'à la fin du siècle, la "méthode des indivisibles" sera appliquée pour résoudre divers problèmes de géométrie, comme la détermination des tangentes

[94] Voir N. Bourbaki *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1960, p. 196.
[95] trad. fr. Paris, A. Colin, 1970.
[96] Sur tout ceci, voir particulièrement F. de Gandt (Ed) *L'œuvre de Torricelli : science galiléenne et nouvelle géométrie*, Paris, Les Belles Lettres, 1987, p. 162 et sq.

(Fermat, dès 1632) et la construction des normales aux courbes géométriques (Roberval, Isaac Barrow, le maître de Newton).

Pour autant, les fondements de la méthode des indivisibles furent assez vite oubliés ou ignorés. Il faut dire que Cavalieri - tous les commentateurs le soulignent - est à peu près illisible.

*

Calcul de la cycloïde.

A la recherche d'un pendule rigoureusement isochrone (voir 2. 2. 15.), Christian Huygens détermina la trajectoire de l'extrémité pesante du pendule par la méthode (améliorée) des indivisibles. Il parvint à définir (selon la notation moderne) l'intégrale :

$$\int_0^h dz/\sqrt{z\,(h-z)}$$

h désigne la hauteur maximale du point pesant par rapport à la position d'équilibre et z son altitude à l'instant t.

La trajectoire correspondante est une courbe, la cycloïde, qu'on appelait à l'époque "roulette". En 1658, Blaise Pascal, sous le pseudonyme de Detonville, défia les savants du temps d'en calculer la quadrature et la rectification (calcul de la longueur d'un arc)[97].

La cycloïde est "le chemin que fait en l'air le clou d'une roue quand elle roule de son mouvement ordinaire", écrit Pascal, qui expose ses propres résultats en 1659 dans la *Lettre de A. Detonville à Monsieur de Carcavy*[98] (le président de la commission chargée d'étudier les mémoires présentés en réponse au défi). Le problème de la quadrature d'une arche de cette courbe avait été résolu par Roberval en 1637, suivi par Fermat, Torricelli et Descartes, qui trouva la tangente à la courbe grâce à l'utilisation du centre instantané de rotation.

Au milieu du XVII° siècle, le problème des quadratures et cubatures des paraboles de tous degrés était résolu (au XVIII° siècle, l'Académie n'examinerait plus la foison d'essais qui continuaient à être produits en la matière). Celle du cercle restait en suspens mais, dans les problèmes sur la cycloïde, on y ramenait les quadratures de fonctions comme x^m ou $\sin^n x$ (m, n entiers positifs). On quadrait également les hyperboles (monômes x^{-r}, r rationnel positif). Seule l'hyperbole ordinaire (r = 1) résistait encore.

Etude des séries infinies.

---

[97] Voir Sainte-Beuve *Port Royal*, 1840-1860, Paris, R. Laffont, 1960 (abrégé), p. 233 et sq.
[98] *Oeuvres complètes*, Paris, Seuil, 1963.

Parallèlement, l'étude des séries infinies allait se révéler décisive. Jon Wallis traduisit en termes arithmétiques les problèmes géométriques de quadrature et le procédé de passage à la limite qui en faisait l'essence même (*Arithmetica Infinitorum*, 1655[99]).

Soit une série de fractions dont le numérateur est la somme des carrés des nombres naturels écrits à partir de 0 et dont le dénominateur est le dernier des termes du numérateur multiplié par le nombre de ces termes :

0+1/1x2 ; 0+1+4/4x3 ; 0+1+4+9/9x4 ; 0+1+4+9+16/16x5 ; …

Ces diverses fractions, montre Wallis, équivalent à :

1/3+1/6 ; 1/3+1/12 ; 1/3+1/18 ; 1/3+1/24 ; …

A mesure que le nombre des termes augmente, l'excès de ces sommes sur 1/3 diminue suivant une loi régulière. Si le numérateur et le dénominateur comportent une infinité de termes posés suivant la loi régulière, leur rapport sera exprimé par la fraction 1/3[100].

James Gregory (*Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667[101]) introduisit l'idée de séries convergentes (en un sens qui n'est pas exactement le sens moderne, voir ci-après). Nicolaus Kaufman, dit Mercator, réduisit un peu plus tard à une série la quadrature de la parabole (*Logarithmo-technia*, 1668[102]).

Cherchant la quadrature de l'hyperbole, c'est-à-dire la surface du segment compris entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes, Mercator exprime l'ordonnée par 1/1+a. Il trouve $1/1+a = 1-a+aa-a^3+a^4$ … Il donne ainsi directement une loi de formation d'où dérive une suite infinie de quantités[103].

Les premiers travaux de Newton dériveront de cette arithmétique des infinis.

On sait que le "binôme de Newton" permet de déterminer les séries pour les puissances rationnelles relatives de (1+x).

*

Parmi le foisonnement des méthodes infinitésimales, les travaux de Newton et de Leibniz allaient bientôt s'imposer. Au même moment d'ailleurs, de sorte qu'une interminable et navrante querelle - dont les procédés furent parfois fort bas - allait s'instaurer quant à l'honneur qui devait revenir au premier des deux inventeurs[104]. En fait, Newton et Leibniz parvinrent à des résultats semblables par des voies séparées. *Malgré*

---

[99] *Operum mathematicorum*, Oxonii, typis L. Lichfield veneunt apud O. Pullein, 1655-1656.
[100] Cité in L. Brunschvicq *op. cit.*, p. 184.
[101] Patavii, ex typographia J. de Cadorinis, 1667.
[102] Londini, impensis M. Pitt, 1668.
[103] *Ibid.*, pp. 185-186.

quelques intuitions, chez Archimède et Kepler, il fallut attendre Newton et Leibniz, en effet, pour qu'il soit vraiment envisagé qu'une réalité physique - le mouvement d'un corps notamment - peut être fractionnée aussi loin qu'on désire. Qu'elle est composée d'éléments infinitésimaux donc et que le chiffre qui la représente n'est pas une somme d'éléments finis mais une limite.

L'invention du calcul infinitésimal : Newton.

Les découvertes de Newton (calcul des fluxions, développement du binôme) remontent à 1665 mais sa *Méthode des fluxions et des suites infinies*, écrite en 1671, ne sera publiée qu'en 1736[105].

Soit x, une grandeur qui dépend d'une variable t, le *moment* de x ou de t désigne leur accroissement infiniment petit. Ce moment de x - noté *o* ou x surmonté d'un point - est la *fluxion* (dérivée) de x qui, lui, est sa *fluente* (primitive).

Ainsi, le calcul différentiel, tel que l'établit Newton, est-il un calcul de dérivées, c'est-à-dire de la limite du quotient de deux infiniment petits lorsqu'ils tendent vers 0 (selon la notation moderne : y' = dy/dx). L'intégration étant l'inverse de la différenciation, le "calcul sommatoire" est la recherche de la limite vers laquelle tend une somme de grandeurs infiniment petites.

Jacques Bernoulli parlera de "calcul intégral" à partir de 1690.

Pour Newton, souligne Léon Bloch, une quantité infiniment petite correspond avant tout à une réalité mécanique (*La philosophie de Newton*, 1908, chap. III). La notion de temps est pour lui indispensable pour conduire à celle de limite. Le moment est avant tout une vitesse ou encore, dira Newton, un "élément de génération". C'est la vitesse d'un mouvement de croissance. On prend de la sorte l'accroissement d'une variable pendant un intervalle de temps aussi court que possible et on détermine le premier rapport de cet accroissement naissant à l'intervalle minimum de temps considéré comme variable indépendante. La grandeur ainsi engendrée est la fluente.

Néanmoins, le moment ou « dérivée » est aussi bien l'accroissement d'une quantité quelconque, dont on suppose la croissance uniforme. Dans une équation, on peut donc substituer à cette quantité la somme de cette quantité et de son moment. L'idée de différentielle, souligne Léon Brunschvicq, ne correspond donc pas à une grandeur

[104] Sur les détails de cette querelle, voir L. Bloch *La philosophie de Newton*, Paris, Alcan, 1908, p. 115 et sq.
[105] trad. fr. Paris, Blanchard, 1994.

déterminée. Elle est indépendante de la considération du mouvement et du temps. Newton conceptualise une grandeur infinitésimale en tant que telle (*Les étapes de la philosophie mathématique*, 1912, pp. 177-179[106]).

Brunschvicq rappelle que cette démarche avait déjà été développée par Fermat dans le court écrit (*Methodus ad disquirendam maximam et minimam*) qu'il envoya à Descartes au lendemain de la publication de la *Géométrie* (1637[107]) de ce dernier. Descartes, note Brunschvicq, résista, cherchant en vain un "absolu" auquel rattacher le procédé inventé par Fermat, c'est-à-dire une notion claire et distincte qui aurait en l'occurrence permis à l'intuition de rejoindre l'intelligence.

L'exhaustion devient infinitésimale : les indivisibles sont remplacés par des quantités évanouissantes.

Newton, qui jugeait la méthode de Cavalieri peu géométrique et "trop dure à admettre", substitue ainsi aux indivisibles des quantités évanouissantes, de façon à considérer non plus les rapports de quantités déterminées mais les limites que l'on peut assigner aux sommes et aux rapports de ces quantités lorsqu'on les considère à leur état de naissance ou d'évanouissement (L. Brunschvicq, p. 192).

Dans son *Tractacus de quadratura curvarum* (1676 ; publié en 1704 en appendice de l'*Optique*[108]), Newton écrit qu'à son sens les grandeurs mathématiques ne sont pas formées de parties, si petites soient-elles mais sont décrites d'un mouvement continu. Elles sont, en d'autres termes, engendrées non par juxtaposition de leurs parties mais les lignes par un mouvement continu de points, les surfaces par le mouvement des lignes, les solides par celui des surfaces, les angles par la rotation des côtés et le temps par un flux continu.

Newton n'explicitera pas davantage les notions de fluxion et de fluente. Pour lui, le calcul infinitésimal est avant tout un calcul de relations. Il renseigne sur le rapport de grandeurs variant ensemble mais qui sont données.

*

L'invention du calcul infinitésimal : Leibniz.

Leibniz, lui, expose ses résultats principalement dans deux mémoires : *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus* (1684) et *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (1686, tous les deux publiés dans les *Acta*

[106] Paris, Blanchard, 1981.
[107] Sceaux, Gabay, 1991.
[108] trad. anglaise in Newton *The mathematical works 1*, London, Johnson reprint corp., 1964.

eruditorum). Le premier de ces mémoires expose la méthode pour différentier toutes sortes de quantités rationnelles et irrationnelles. Le second donne les règles fondamentales du calcul intégral. Dès 1672-1675, néanmoins - ses papiers en font foi - Leibniz possédait ces résultats[109].

L'ensemble des articles des *Acta eruditorum* a été traduit en français et présenté de manière remarquable par N. Parmentier in Leibniz *La naissance du calcul différentiel* (1989[110]). Par ailleurs, pour tenir compte des conceptions à peu près définitives de Leibniz en matière de calcul différentiel, il est courant de se référer à l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de L'Hôpital (1696[111]).

Leibniz fera le projet d'une *Scientia Infiniti* qui ne verra jamais le jour. Il songera même à mettre au point un appareillage pour calculer les quadratures : l'intégraphe (*Supplementum geometria dimensiorae…*, 1693, voir *La naissance du calcul différentiel*, p. 247 et sq.).

Leibniz écrit "dx" le moment de x, qu'il nomme "différence" de x, soit la portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continûment. Il introduit le symbole "∫" (pour *Summa integralis*) et la notation ∫f(x)dx, qui rappelle la méthode des indivisibles mais dont l'appellation "d'intégrale" par Jacques Bernoulli en 1690 soulignera qu'il s'agit essentiellement d'une fonction à déterminer à partir de sa différentielle ; d'une primitive.

La notion de fonction.

On dit souvent que Leibniz fait preuve de moins de rigueur que Newton dans ses démonstrations. En même temps, ses travaux sont logiquement et philosophiquement beaucoup plus réfléchis. Comme en témoigne l'élaboration du concept clé de l'analyse, celui de fonction.

Pour le reste, Leibniz ne faisait pas mystère de ses piètres dons de calculateur. Il disait ne pouvoir consacrer à un calcul l'attention nécessaire sans s'échauffer (de sorte qu'il laissait cela à des aides, comme Tschirnaus). De fait, beaucoup de commentateurs l'ont observé, ses écrits mathématiques fourmillent d'erreurs techniques assez élémentaires. Sa formation était sans doute insuffisante. Leibniz n'a pas eu la patience d'apprendre les mathématiques. Il les a abordés d'emblée pour inventer. Or, son approche de novice lui permit justement d'être un découvreur ; attitude que N. Parmentier qualifie "d'optimisme mathématique".

Leibniz ramène toute courbe à une composition de segments rectilignes formés à partir de deux points infiniment proches et donne à cette différenciation une traduction

[109] Pour une première présentation d'ensemble de la démarche de Leibniz, voir F. Burbage et N. Couchan *Leibniz et l'infini*, Paris, PUF, 1993.
[110] Paris, Vrin, 1989.

algébrique. De l'équation d'une courbe se déduit une équation différentielle qui donne la tangente, ainsi que les maxima et minima de cette courbe et le point d'inflexion (où la courbe s'inverse) dès lors que l'on introduit des dérivées secondes.

Jusque là, on trouvait les tangentes au moyen de procédés géométriques, lesquels supposaient la prise en compte de la figure particulière dessinée par chaque courbe. Certaines, dès lors, comme la "chaînette" (courbe que dessine un fil sous l'effet de son propre poids) ou la "roulette" posaient, nous l'avons vu, quelques problèmes. Fort de son nouveau calcul, Leibniz est à même de donner les caractéristiques de n'importe quelle courbe. Les tangentes ne sont plus pour lui des droites passant par un point de la courbe. Elles sont définies à partir des courbes elles-mêmes, comme autant de droites joignant deux points infiniment proches.

Tout de même, les quadratures ne relèvent plus d'une décomposition ou d'une sommation d'indivisibles mais d'un processus de variation. Il est toujours possible en fait, selon Leibniz, de trouver une équation commune à tous les points d'une ligne, en vertu de laquelle ses changements doivent arriver. Il n'y a pas de point d'un visage dont le contour ne fasse partie d'une ligne géométrique et ne puisse être tracé d'un trait par un certain mouvement réglé, dit Leibniz. C'est là l'idée de fonction, qui se dégage dans la correspondance entre Leibniz et Jean Bernoulli en 1698. Et Leibniz finira par ramener les infinitésimaux à cette notion.

La première véritable reconnaissance d'un infini actuel : les infinitésimaux.

Au départ, souligne un commentateur, Leibniz part de Cavalieri - qu'il interprète mal, comme beaucoup d'autres, puisqu'il croit rencontrer chez lui une méthode infinitésimale. Un peu comme Kepler, nous l'avons vu, Leibniz affirme que le continu n'est pas seulement virtuellement décomposable en éléments indivisibles mais est *réellement* formé de parties infinies qui le composent par sommation. Ces parties, en d'autres termes, forment *un infini actuel et non seulement potentiel*[112].

Mais Leibniz - nous tenterons plus loin de comprendre pourquoi - refusera finalement de réaliser les infinitésimaux, ceux-ci n'ayant pour lui que le statut d'affections de grandeurs recevant leur détermination des opérations dans lesquelles elles sont engagées. *La différenciation définit la différentielle et non l'inverse.* On ne peut donc traiter dx comme une grandeur. C'est une sorte d'être intermédiaire, ni quantum fixe (sinon dx ne

---

[111] Paris, ACL-Ed ., 1988.

[112] Voir R. Violette « La manière exacte dont Leibniz a inventé l'intégration par sommation » *Revue philosophique* n°1, 1985, pp. 29-34.

pourrait être substitué à x dans le calcul) ni quantité nulle. Leibniz lui accordera finalement le même statut que celui des racines imaginaires, comme √1 (*Lettre à Varignon*, 2 février 1702). La différentielle est un être pour l'esprit, une quantité évanouissante qu'il ne peut s'agir de justifier dans l'intuition en prouvant l'existence d'infiniment petits. Leibniz se rallie finalement au point de vue qui sera généralement adopté au XVIII° siècle.

*

La métaphysique du calcul infinitésimal au XVIII° siècle.

Pour Lazare Carnot, dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (1797[113]), les équations différentielles seront de simples "auxiliaires" exprimant les conditions d'un problème auquel répond une équation recherchée. En elles-mêmes, les différentielles ne rendent pas plus petites les quantités. Ce sont des "inexactitudes" qui se compensent et s'annulent dans leur rapport (théorie dite "des erreurs compensées", qui avait déjà été exprimée par George Berkeley), de sorte qu'elles n'apparaissent pas dans le résultat, celui-ci ne pouvant s'établir qu'entre des quantités fixes et finies. Cette compensation même, souligne Carnot, implique que dx et dy ne sont pas infiniment petites mais *indéfiniment* petites (I, §§ 3-10).

Ainsi furent closes les querelles liées à la métaphysique du calcul infinitésimal dont, en France, l'Académie des Sciences avait été maintes fois le terrain au début du XVIII° siècle[114]. Raison était rendue aux objections de Berkeley, quant au caractère inconcevable et donc purement imaginaire des notions newtoniennes de "vitesse naissante" et de vitesse de cette vitesse (*L'analyste ou Dissertation adressée à un mathématicien incrédule*, 1734[115]).

La critique de Berkeley était toute nominaliste : nous ne pouvons à bon droit faire usage d'un signe sans avoir une idée d'un être concret qui lui corresponde (voir 2. 1. 19.). L'infini ne peut donc être appliqué à une quantité, sinon au titre d'une inexactitude commode dans le calcul, puisqu'il ne représente jamais qu'un nombre dont on ne cerne pas précisément le chiffre (*Des infinis*, 1707)[116].

---

[113] 2 volumes, Paris, Blanchard, 1970.
[114] Voir M. Blay *Les raisons de l'infini*, 1993, chap. IV.
[115] trad. fr. in *Oeuvres*, 3 volumes, Paris, PUF, 1985-1992.
[116] Voir M. Blay « Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley » *Revue d'histoire des sciences*, XXXIX/3, 1986, pp. 223-253.

La critique de Berkeley portait particulièrement sur le principe d'omission des infiniment petits, que l'on trouvait notamment formulé par le marquis de L'Hospital (1696) et qui permettait d'identifier deux quantités ne différant que par une quantité infiniment petite. On peut donc illustrer la critique de Berkeley ainsi : soit la chute d'un corps et la position de ce corps :

$s = 4t^2$ (t : le nombre de secondes et s : la distance parcourue)

Quelle est la vitesse du corps au bout d'une seconde ? En prenant dt, l'accroissement infinitésimal de temps entre 1 et 1dt, on a :

$$ds/dt = [4(1+dt)^2]/dt = 8+4dt$$

soit, en négligeant 4dt, la vitesse du corps est 8. Mais on a raisonné comme si dt était nul dans un cas et non nul dans l'autre, selon le moment du calcul. Ce que Berkeley illustrait dans le cas d'un calcul de tangente à une parabole (*L'analyste*, §21).

Retour de l'infini potentiel.

Une fois de plus, ainsi, l'infini était réduit au seul infini potentiel. "Plus aucun géomètre ne prend plus à la lettre les expressions d'infiniment grands et petits comme des quantités actuelles", écrit Jean-Etienne Montucla dans son *Histoire des mathématiques* (1802, III, p. 263 et sq.[117]). Mais seulement comme des quantités pouvant s'accroître jusqu'à devenir plus grandes ou plus petites que toute quantité finie.

L'infini se rapporte toujours à une collection finie d'objets, dira encore le physicien Ludwig Boltzmann (1844-1906). Ainsi, la multiplicité infinie des vitesses que chaque molécule est susceptible de prendre doit être conçue comme le cas limite intervenant lorsqu'une molécule reçoit un nombre de vitesses de plus en plus grandes. Comme on l'a noté, il s'agit là d'un véritable retour à la méthode des indivisibles[118].

La métaphysique de l'infini est totalement inutile au calcul différentiel, écrivait d'Alembert dans l'article "Calcul différentiel" de *L'Encyclopédie* (1751-1780[119]). Et dans sa *Théorie des fonctions analytiques* (1797[120]) - dont le sous-titre est explicite (*Les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*) – Joseph-Louis de Lagrange s'efforcera de définir, au moyen des seules lois de l'algèbre, les opérations fondamentales de l'analyse infinitésimale.

Dans un précédent mémoire (*Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différenciation et à l'intégration des quantités variables*, 1772[121]), Lagrange affirmait déjà que le calcul différentiel consiste

[117] 4 volumes, Paris, chez H. Agasse, 1802.
[118] Voir R. Dugas *La théorie physique au sens de Boltzmann et ses prolongements modernes*, Neuchâtel, Ed. du Griffon, 1959, p. 25 et sq.
[119] reprint en 35 volumes, Stüttgart-Bad Cannstatt, F. Frommann Verlag, 1988.
[120] Paris, Imprimerie de la République, prairial an V.
[121] *Œuvres complètes* III (10 volumes Hildesheim New York, Olms, 1973).

uniquement à trouver les fonctions dérivées d'une fonction ; le calcul intégral représentant l'opération exactement inverse. Il s'appuyait sur le développement en série de Brook Taylor (*Methodus Incrementorum directa et inversa*, 1715[122]), qui donne le développement d'une fonction f(x) pour une valeur (x+h) voisine de la variable x :

$$f(x+h) = f(x)+hf'(x)+(h^2/2)f''(x)+\ldots$$

L'approche toute intuitive de la notion de limite témoigne qu'*on ne voyait finalement dans le calcul intégral qu'une sorte de méthode d'exhaustion perfectionnée*.

*

2. 3. 9.

Le concept de limite.

Le calcul différentiel, écrit d'Alembert (*op. cit.*) est celui des premières et dernières raisons. C'est une détermination algébrique de rapports qui revient à trouver *la limite* des rapports entre les différences des deux variables d'une équation. Mais ainsi la définition de la limite était encore bien imprécise. Elle laissait indéterminée la structure du domaine où elle s'appliquait pour s'en tenir à une intuition vague qu'exprime par exemple cette définition que l'on trouve chez Augustin-Louis Cauchy : "les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchant indéfiniment d'une valeur fixe de manière à en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres".

La notion de limite consiste alors à sauter par dessus un calcul inachevable ; par dessus l'infini potentiel. Ce qu'allait amener à reconsidérer la notion de convergence.

La notion de convergence

On savait depuis longtemps qu'un nombre irrationnel comme $\sqrt{2}$ peut se calculer par une fraction prolongeable à l'infini. Mais il fallait démontrer que ce genre de série tend vers une limite *finie*. Ce fut là l'œuvre d'Augustin-Louis Cauchy, qui s'attacha à définir les règles générales de la convergence des séries (*Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, 1821[123]).

Une série, montre Cauchy, est une suite indéfinie de quantités u_0, u_1, u_2, …u_n, … qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Si, pour des valeurs toujours croissantes de n, la somme des n premiers termes $s_n = u_0+u_1+ \ldots+u_n$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite s,

[122] Londini, typis Pearsonianis, 1715.
[123] *Oeuvres complètes,* Paris, Gauthier-Villars, 1897.

la série sera dite "convergente" à cette limite. Si, tandis que n croît, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera dite "divergente".

La limite n'est plus ainsi pensée, de manière encore toute géométrique, comme le "bout" du calcul mais est inscrite dans le calcul lui-même. Elle n'est plus conçue comme la limite de la fonction mais comme limite du changeant et du non-changeant dans la fonction elle-même[124].

Pour qu'une série soit convergente, il semble intuitivement évident qu'il est nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment tandis que n augmente. Soit par exemple la suite $u_n = 1/n$ (n appartient à **N***), on comprend facilement que plus u_n est grand, plus 1/n est petit. Donc, quand n tend vers l'infini, la limite de la suite est 0. Mais cette condition, montre Cauchy, ne suffit pas. Il faut que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes : $u_n + u_{n+1}$; $u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$, etc, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Tel est le "critère de Cauchy", qu'on énonce de nos jours : pour tout e>0 (donc aussi petit que l'on veut), il existe un entier N tel que n = m = N entraîne $| u_m + u_{m+1} \ldots + u_n| = e$. Donc, étant donnée une série, s'il existe un entier N tel que pour n et m = N, on ait $| x_n - x_m| = e$, la suite est dite "suite de Cauchy". On démontre que toute suite convergente est une suite de Cauchy[125].

Définition rigoureuse de la limite.

C'est à Cauchy ainsi, note Léon Brunschvicq, que l'on doit d'avoir introduit la conception arithmétique de la limite (*Les étapes de la philosophie mathématique*, p. 356). Jusque là, on disait, comme D'Alembert, qu'une grandeur est la limite d'une autre lorsque celle-ci peut approcher d'elle plus près que d'une grandeur donnée si petite qu'on la puisse supposer (art. "limite" de *L'Encyclopédie*, 1751-1772). Loin d'être, comme au sens actuel, purement ordinale, l'idée de limite était essentiellement quantitative, ce qui traduisait l'approche encore tout intuitive des opérations d'intégration. Elle représentait une quantité dont d'autres s'approchent de plus en plus. Cauchy reprend à peu près cette formule : "lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres". Mais, au XVIII° siècle, on admettait sans la définir la notion "d'approcher une limite". *On ne savait pas rendre la continuité, pourtant essentielle à l'idée même de limite*. On traitait cette continuité comme un fait, tandis que Cauchy l'arithmétise.

Considérons une suite formée par une infinité de valeurs numériques assignées à une variable. S'il arrive qu'à partir d'un certain rang m la différence $|u_{m+p} - u_m|$ est plus petite que e, si petit que soit e, la suite est convergente. Soit U, la variante convergente ou limite de la suite, $U - u_m<e$. Mais s'il n'y a pas de quantité rationnelle U telle que $U - u_m<e$? En toute rigueur, on ne peut parler de U comme d'une limite. Elle sera une limite "idéale", dit Cauchy. Et ainsi définit-on rigoureusement la notion de nombre irrationnel pour l'insérer dans la continuité numérique.

[124] Voir G. Deleuze *Différence et répétition*, Paris, PUF, 1968, p. 223.
[125] Cauchy suppose que N ne dépend pas de x, ce qui est faux si la série est seulement convergente. Voir J. Dieudonné *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Paris, Hermann, 1978, pp. 251-252.

*

Avec Cauchy, a-t-on dit, la notion de limite, fixée une fois pour toutes, est prise pour point de départ. Celles de fonction continue et de dérivée s'en déduisent, ainsi que leurs principales propriétés élémentaires. L'existence d'une dérivée, ainsi, n'est plus un article de foi mais une question à étudier par les moyens ordinaires de l'analyse[126]. Pour la première fois, le concept d'intégrale est rendu indépendant de la nature de l'argument de la fonction et du champ d'intégration.

A partir de là, la limite sera définie de façon tout à fait rigoureuse avec Karl Weierstrass : s'il est possible de déterminer une borne d telle que pour toute valeur de h, plus petite en valeur absolue que d, |f(x+h)-f(x)| soit plus petite qu'une quantité e aussi petite que l'on veut, on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction (1861).

Extension de l'intégration à des fonctions non-continues.

Avec Cauchy l'intégrale définie reçoit sa première définition analytique (L. Brunschvicq, *op. cit*., p. 335 et sq.). Elle est "la somme des valeurs infiniment petites de l'expression différentielle placée sous le signe ∫, qui correspond aux diverses valeurs de la variable renfermée entre les limites dont il s'agit (…) Une semblable intégrale a une valeur unique et finie, toutes les fois que les deux limites de la variable étant des quantités finies, la fonction sous le signe de ∫ demeure elle-même finie et continue dans tout l'intervalle compris entre ces limites". La notion d'intégrale est ainsi étendue hors du domaine de la continuité, note Brunschvicq.

Et après Cauchy, la réflexion sur les opérations d'intégration portera essentiellement sur des fonctions autres que continues. De fait, l'intégrale définie peut s'étendre, sans difficulté, à des fonctions continues par morceaux. La notion de fonction cesse d'être subordonnée à l'hypothèse de la continuité et c'est dès lors un problème - que les bacheliers connaissent bien - que de décider si la continuité peut lui être attribuée par rapport à certains intervalles définis de la variable.

Cauchy appelle "intégrale définie singulière", une intégrale prise relativement à une ou plusieurs variables entre les limites de certaines valeurs de ces variables. Soit une fonction continue dans un intervalle (a,b), sauf en un point c, nous formons :

$$\int_a^{c-h} f(x)\,dx \text{ et } \int_{c+h}^{b} f(x)\,dx$$

Si ces deux intégrales tendent vers des limites déterminées quand h tend vers 0, leur somme sera:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim (h=0) \left[\int_a^{c-h} f(x)\,dx + \int_{c+h}^b f(x)\,dx\right]$$

Cette méthode sera généralisée par Bernard Riemann : "pour qu'une fonction bornée soit intégrable dans [a,b], il faut et il suffit qu'on puisse diviser [a,b] en intervalles partiels tels que la somme des longueurs de ceux de ces intervalles dans lesquels l'oscillation est plus grande que e, quel que soit e>0, soit aussi petite que l'on veut" (1854).

Il existe donc des fonctions discontinues susceptibles d'intégration et, réciproquement, des fonctions continues n'ayant pas de dérivées pour certaines valeurs de la variable dans un certain intervalle, ce qui heurte tout autant la conception intuitive du calcul infinitésimal.

En 1872, Karl Weierstrass en donnera pour exemple la fonction $f(x) = \int_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n px)$, avec x = une variable réelle, a = un entier impair >1 et b = une constante positive>1.

Ainsi, tous les éléments au fondement de l'analyse étaient en place. De l'infini mathématique, il n'y avait plus rien à dire. De fait, nous abandonnerons ici l'histoire du calcul intégral, dont la suite – pour autant que nous soyons à même de bien l'appréhender ! car les choses deviennent ici assez difficiles à suivre pour les non spécialistes – la suite n'apporte rien de très significatif à notre propos[127].

*

La "crise" ouverte par le calcul infinitésimal.

Le calcul infinitésimal ouvrit, comme l'a noté Léon Brunschvicq (p. 166 et sq.), une véritable crise dans la pensée classique. Pour la première fois, contre l'idéal tout scolastique d'une déduction a priori des concepts de la raison et marquant aussi bien l'impossibilité à atteindre l'achèvement d'une méthode parfaite à la façon cartésienne où toutes les notions sont définies et tous les principes démontrés, pour la première fois il fallait affronter des concepts rigoureusement manipulables dans les calculs mais échappant à toute représentation et défiant l'imagination.

---

[126] Voir N. Bourbaki *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1960, p. 218.

[127] Pour les développements ultérieurs, on peut se référer à A. Michel *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Paris, Vrin, 1992, particulièrement sur les travaux d'Henri Lebesgue et la théorie de la mesure (chap. IV). Malheureusement, l'ouvrage est d'une aridité technique qui le rend pratiquement illisible pour les non spécialistes. Dans le même genre, on peut également consulter J. T. Desanti *Les idéalités mathématiques*, Paris, Seuil, 1968.

Pour les Grecs, la mesure de l'hypoténuse relevait du mystère (voir ci-dessus). Mais cette mesure n'était aussi qu'un simple résultat bizarre. Dans les paradoxes de Zénon, l'infini n'apparaît également que comme un scandale, que la pensée s'épuise à débrouiller. De sorte que les méthodes d'exhaustion et la géométrie des indivisibles auront, nous l'avons vu, avant tout pour objet de sauter par dessus l'infini. Avec elles, il s'agit toujours de permettre à Achille de rattraper la tortue.

Tout changea dès lors que Newton et Leibniz introduisirent - essentiellement sous forme de dérivées - des infinitésimaux dans leurs calculs. Correspondaient-ils à quelque réalité physique ? Ce qu'on nomme la "métaphysique du calcul infinitésimal" n'aura de cesse, tout au long du XVIII° siècle, que de se débarrasser de ces infinis. Soit, avec Berkeley puis Carnot, en les traitant comme de simples approximations. Soit avec d'Alembert - selon une voie déjà clairement indiqué par Newton et qui sera poursuivie avec le travail de fondement de l'analyse de Lagrange, Cauchy et Weierstrass - en ramenant le calcul infinitésimal à l'expression de la limite de rapports.

En somme, *si la méthode d'exhaustion n'annonce pas en son principe même le calcul infinitésimal, celui-ci, néanmoins, en retrouva à sa façon l'esprit. Lui aussi ne parlera d'abord de l'infini que pour ne pas avoir à tenir compte de l'indéfini*.

Il est en effet un aspect sous lequel la notion de convergence est essentielle au calcul infinitésimal et fait comme achever logiquement la méthode des indivisibles, c'est que, dans une série, elle permet de se dispenser totalement du calcul des termes n'ayant pas d'influence sur la détermination de la limite. Nous pouvons alors sauter par dessus l'infinité de ces termes pour opérer sur la somme de la série. De ce point de vue, ce qu'on nomme "l'analyse non-standard" représente le lointain achèvement de la méthode d'exhaustion.

L'analyse non standard

Alors que tous les nombres sont mis sur un même pied d'égalité en mathématique - ce qui pose le problème du statut de dx, nous l'avons vu - l'Analyse non-standard d'Abraham Robinson s'est précisément proposée de déterminer rigoureusement les petits nombres qui peuvent être négligés

dans le calcul, de ceux qui doivent être pris en considération (*Non-standard analysis*, 1966[128]). En ceci, elle donne, a-t-on souligné, un statut formel aux infinitésimaux[129].

Sur bien des points, l'analyse non-standard formalise les méthodes pragmatiques de la physique et notamment de la mécanique quantique. Elle recouvre ainsi, par exemple, le problème de la "moyennisation", qui consiste à remplacer la valeur exacte d'un paramètre par sa moyenne sur une petite région pour effacer les variations fines que l'on ne distingue pas à l'échelle macroscopique. L'analyse non-standard considérera ainsi tout nombre standard comme entouré d'un halo qui est l'ensemble "externe" (*i.e.* : sans frontière) des nombres qui en sont infiniment voisins. L'ensemble des réels, ainsi, est un ensemble de halos.

Il ne peut y avoir deux nombres standards distincts dans un même halo, car leur différence serait infiniment petite et non pas standard. Sous ce qualificatif de "standard", il faut entendre un nombre qui peut être décrit par un algorithme accessible et qui peut être considéré explicitement. Un nombre concevable donc. En regard, sera dit "non-standard" un nombre qu'on ne peut définir avec précision dans un temps fini. Mais sans qu'une distinction précise puisse être établie avec un nombre standard. Un nombre illimité, donc, ou plutôt inaccessible (car il est fini). L'analyse non-standard décrit précisément les relations entre fonctions standards et non-standards ; ces derniers étant appelés "i-grands" et "i-petits" (un nombre i-petit étant l'inverse d'un i-grand). C'est ainsi qu'elle permet de calculer "l'ombre" d'une fonction non-standard, qui est l'unique fonction standard d'un halo, étant entendu que, par définition, cette ombre ne peut être calculée explicitement.

Le fait est que l'introduction de l'infini en mathématique n'éclaira pratiquement en rien son concept et ne parvint pas même à établir l'infini actuel. La métaphysique du calcul infinitésimal a laissé l'infini métaphysiquement intact. Symptomatiquement, contre Fontenelle (voir ci-après), d'Alembert se croit obligé de rappeler qu'il n'est qu'un seul infini véritable, celui qu'on attribue à Dieu ! Mais, *à travers la notion de convergence, la réflexion sur le calcul intégral conduisit à une appréhension nouvelle de la continuité qui, elle, allait modifier la conception de l'infini*.

* *

C) Le transfini

2. 3. 10.

[128] Amsterdam, North-Holland Publ., 1966. Voir J. Harthong « L'analyse non-standard » *La Recherche* n°148, octobre 1983, pp. 1194-1201. Une formulation axiomatisée de cette théorie a été le fait de E. Nelson (« Internal Set Theory: a new approach to non-standard analysis », *Bull. Amer. Math. Soc.* Vol. 83 n°6 1977, pp. 1165-1198). Voir A. Robert « Une approche naïve de l'analyse non-standard » *Dialectica* vol. 38 fasc. 4, 1984, pp. 287-296.

[129] Voir P. J. Davis & R. Hersh *L'univers mathématique*, 1982, trad. fr. Paris, Bordas, 1985, p. 227 et sq.

Pendant des siècles, nous l'avons vu, on admit que tout nombre traduit la mesure d'une grandeur[130]. Les irrationnels comme $\sqrt{2}$ étaient bien des nombres ainsi et le scandale de leur inachèvement était évité. Ils pouvaient, comme tous les autres nombres, être ramenés à une figuration géométrique. Il faudra attendre Carl Gauss et son *Mémoire sur les séries hypergéométriques* (1812) pour mettre en cause cette conception.

Le nombre distinct de la grandeur.

Gauss formule l'idée que l'objet général des mathématiques est l'étude des relations entre des objets abstraits, définis par des axiomes et sans rapport nécessaire avec une réalité intuitive quelconque. Un nombre est défini par une opération, ainsi, non par un dénombrement d'éléments associés à une grandeur.

Par la suite, on abandonna peu à peu le modèle géométrique pour fonder l'analyse, le remplaçant par une définition rigoureuse des nombres réels, eux-mêmes fondés sur la notion de nombre entiers - ce qu'on a appelé "l'arithmétisation des mathématiques".

L'une des premières tentatives pour écrire ainsi des "Eléments" de mathématique - à l'égal des *Eléments de géométrie* d'Euclide - est celle de Martin Ohm (*Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik*, 1822[131]). Ohm voulait reconstruire toute la mathématique à partir du nombre entier, en établissant de la sorte les lois générales des *opérations* qui constituent l'essence de tout calcul.

Pendant des siècles, on a conçu que la suite des nombres était une succession infinie d'éléments discrets puisque toute grandeur devait pouvoir être ramenée à une unité.

Au Livre VII des *Eléments* d'Euclide (vers 300 av. JC), le caractère discret des entiers s'exprime à travers deux axiomes implicites principaux : l'unité mesure tout nombre et, au dessous d'un nombre donné, il n'en existe qu'une multitude finie. Ce qui permet de trouver la plus grande commune mesure de deux nombres au moyen de l'algorithme d'Euclide ou "anthyphérèse", dite encore méthode de "mutuelle soustraction". Sont précisément irrationnels, tous les rapports pour lesquels l'anthyphérèse ne s'arrête jamais.

Composée d'éléments discrets, la suite des nombres était pleine de trous. La notion de coupure, seule, lui donna un caractère continu. Fournissant pas là-même la première définition mathématique du continu[132].

---

[130] Voir M. Caveing *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les* Eléments *d'Euclide et la* Physique *d'Aristote* in (collectif) *Penser les mathématiques*, Paris, Points Seuil, 1982, p. 154.
[131] Nürnberg, F. Korn, 1852-1853.
[132] Voir A. Darbon *La philosophie des mathématiques. Etude sur la logistique de Russell*, Paris, PUF, 1949,

*

La notion de coupure

Avec le mathématicien Richard Dedekind, la continuité sera apportée à l'ordre numérique et, loin d'être une donnée immédiate de l'intuition, le continu sera présenté comme une règle logique formellement construite (*Continuité et nombres irrationnels*, 1872[133]).

Sur l'ensemble de ces questions, nous renvoyons particulièrement à l'ouvrage de J-P. Belna *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor et Frege* (1996[134]), qui possède une qualité très rare pour un livre de logique : la clarté !

Le but de Dedekind, ce faisant, était de fonder rigoureusement les principes de l'analyse infinitésimale[135]. Ayant dû enseigner le calcul différentiel, Dedekind sentit en effet, de son propre aveu, "le manque d'une base réellement scientifique de l'arithmétique". En particulier dans les questions de limite, pour lesquelles on avait encore le plus souvent recours à l'évidence géométrique (voir ci-dessus). On parlait de même de continuité sans avoir élucidé cette notion. Le fait qu'entre deux nombres quelconques, il puisse y en avoir une infinité d'autres ne pouvait être expliqué, pensait-on, que par un fait de continuité qui échappait à la notion de nombre elle-même. Et les nombres irrationnels demeuraient des exceptions, qu'on ne pouvait accepter qu'en montrant leur correspondance avec des grandeurs géométriques. Dedekind allait totalement renverser ce point de vue.

Si l'on partage tous les points d'une droite en deux classes de façon que tout point de la première se trouve à gauche de tout point de la seconde, alors il existe un point et un seul qui engendre cette *coupure* de la droite en deux parties, de telle sorte que tout nombre de la première soit inférieur à tout nombre de la seconde.

En d'autres termes, soit **Q** l'ensemble des nombres rationnels et un élément *a* appartenant à **Q**, on peut couper tous les éléments de **Q** en deux classes A_1 et A_2, tout nombre de A_1 étant inférieur à tout nombre de A_2, des trois manières suivantes :

- il existe un élément a de A_1 qui est supérieur à tous les autres
- il existe un élément a de A_2 qui est inférieur à tous les autres

---

11° leçon.

[133] trad. fr. Paris, Ornicar/Seuil, 1979. Voir également R. Dedekind *La création des nombres*, trad. fr. Paris, Vrin, 2008.

[134] Paris, Vrin, 1996.

[135] Voir P. Dugac *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris, Vrin, 1976. Le chap. III en

- il n'existe ni l'un ni l'autre de ces deux éléments et la coupure définit alors un nombre irrationnel[136].

Rappel : un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme p/q ; p et q étant des nombres entiers, comme 1/2 ou 5, qui s'écrit 5/1.

Dans ce dernier cas, en effet, il est possible de choisir, dans chacune des deux classes définies par la coupure, un nombre a et un nombre b tels que la différence (b-a) soit aussi petite que l'on veut. Cette condition permet d'introduire, dans la continuité des nombres rationnels, les nombres irrationnels qui échappent à **Q**, puisqu'ils ne peuvent être réduits à un quotient d'entiers mais correspondent à une somme infinie de nombre rationnels.

Prenons comme coupure $\sqrt{2}$. Dans la classe inférieure, nous rangeons tous les nombres rationnels négatifs, zéro et tous les rationnels positifs dont le carré est inférieur à 2. Dans la classe supérieure, nous rangeons tous les autres nombres. Cette coupure doit être telle que l'on peut choisir un nombre a quelconque de la première classe et un autre nombre b de la seconde, tels que (b-a) soit aussi petit que l'on veut. Cela signifie qu'il n'existe pas dans la classe inférieure un nombre x supérieur à tous les autres et, réciproquement, qu'il n'existe pas davantage de nombre inférieur à tous les autres dans la classe supérieure. Supposons en effet que x existe. On doit avoir $x^2<2$. Par ailleurs, tout nombre $b>x$ doit appartenir à la seconde classe puisque x est supposé être le plus grand nombre de la première classe. Or, il est toujours possible, comme le montre la divisibilité à l'infini de $\sqrt{2}$, de trouver un nombre b tel que b^2 soit compris dans l'intervalle $x^2<b^2<2$. b serait donc plus grand que x, tout en appartenant à la classe inférieure. Il n'y a donc pas de plus grand nombre de la classe inférieure. Cela signifie que la continuité est assurée jusqu'à $\sqrt{2}$, qui ne définit plus une sorte de trou dans **R**, comme dans **Q**.

Les irrationnels sont des nombres comme les autres.

Ainsi, quoiqu'on ait pu dire que la notion de coupure revenait à vouloir faire du continu avec des trous, les nombres irrationnels ne forment plus autant de gouffres incommensurables dans la suite des nombres, étant inépuisables au milieu d'éléments discrets. Jusque là on décrivait un nombre irrationnel comme une "grandeur extensive", c'est-à-dire comme le simple résultat de la mesure d'une grandeur par une autre. Dedekind entend, lui, définir le nombre irrationnel indépendamment de tout appel à l'intuition

---

particulier.

[136] Voir R. Baire *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité*, 1905, Sceaux, Gabay, 1992. L'auteur juge qu'il est préférable de substituer à la notion de coupure celle plus générale et maniable de bornes d'un ensemble.

géométrique[137]. Or, de même que pour définir les nombres entiers négatifs et les nombres rationnels, on ne fait intervenir que les entiers positifs, il faut que les nombres irrationnels puissent être entièrement définis en ne faisant appel qu'aux rationnels, qui sont, eux-aussi, des coupures et sont par là même définis par elles. L'ensemble de toutes les coupures, conclut Dedekind, définit l'ensemble des nombres réels **R**, qui est dès lors le seul ensemble continu (résultat que Cantor retrouvera, voir ci-après).

Si la définition du nombre est d'être une coupure, les irrationnels sont des nombres comme les autres. La notion de coupure dit deux choses en effet : tout nombre est à l'intersection de deux séries inépuisables (il "coupe") et, entre deux nombres, on peut toujours en intercaler un troisième plus petit (la différence b-a peut être aussi petite que l'on veut). Cela signifie qu'entre deux nombres peuvent se loger une infinité d'autres ou plutôt que tout nombre en *engendre* une infinité d'autres. *Poser un élément discret, c'est le poser comme continu, c'est ouvrir deux séries infinies autour de lui.*

Rendre le discret continu.

L'idée de continuité qu'élabore Dedekind - il convient de le souligner, car ce point n'est pas toujours aperçu - intervient toujours entre des unités distinctes, des coupures, dont la distance à une autre unité est finie, bien qu'elle puisse être rendue moindre que n'importe quelle quantité donnée. *Dedekind s'efforce de rendre le discret continu*. *Au lieu d'énoncer que le continu se compose de points, il définit la ponctualité comme une coupure entre des séries inépuisables*. Le problème du continu n'est plus ainsi posé en termes de composition mais en termes de complétion[138]. Comme le note Bertrand Russell (*Introduction à la philosophie mathématique*, 1919, chap. X & XI[139]), une telle idée ne cadre guère avec l'idée vague qui s'attache couramment au mot "continuité" et qui marque plutôt l'absence de séparation, une sorte de "disposition des contours qui provient d'un brouillard épais" (p. 130).

Parler de continuité, au sens de Dedekind, c'est plutôt définir un "voisinage" de x, comme l'ensemble de tous les nombres compris entre x-e et x+e ; le terme e pouvant être aussi petit que l'on veut. De sorte qu'une fonction f(x) est dite continue pour l'argument *a* si, pour chaque nombre positif s différent de 0 mais aussi petit que l'on veut, il existe un

[137] Au même moment, plusieurs autres théories du nombre irrationnel poursuivaient le même but (Méray et Cantor, Weierstrass).
[138] Voir A. Badiou *Le nombre et les nombres*, Paris, Seuil, 1990, p. 176.
[139] trad. fr. Paris, Payot, 1928.

nombre e, différent de 0, tel que pour toutes valeurs de d qui sont numériquement moindres que e, la différence f(a+d)-f(a) est numériquement moindre que s.

La notion de coupure permet de définir la continuité sans avoir recours au concept de limite. Les nombres non rationnels engendrent simplement une infinité de coupures. **R**, dès lors, est totalement ordonné. Entre deux nombres différents, on compte une infinité de nombres différents. **R** est *dense* (tandis que, par opposition, **N**, l'ensemble des nombres entiers, est discret).

La notion de coupure invite à considérer que continu signifie dense, plein. Une réalité continue est sans vides. *Elle est remplie à l'infini. Et cette continuité ne se tire pas de la progression indéfinie de la suite des nombres. Elle fonde cette dernière.*

Si **R** a été imaginé sur le modèle de **N**, la définition logiquement rigoureuse de **N** n'a été formulée qu'après celle de **R** par Giuseppe Peano. Ce qui est reconnaître que, logiquement, le discret est fondé, négativement, sur le continu et non le contraire. Selon le V° axiome de Peano (1889), en effet, tout sous-ensemble A de **N** qui contient 0 et le successeur x' de tout x appartenant à A, coïncide avec **N**.

La notion de coupure invite à considérer que l'infini n'est pas au bout de la suite des nombres mais qu'il engendre au contraire leur continuité. Poussant ces réflexions à leur terme, Georg Cantor pourra définir une arithmétique de l'infini (*Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, 1895-1897[140]). Cantor, note Léon Brunschvicq, en arrive à présenter les distinctions fondamentales d'indéfini et de "transfini" comme les conséquences d'une construction logique a priori (*Les étapes de la philosophie mathématique*, p. 385 et sq.).

Brunschvicq signale le caractère précurseur, quant à l'élaboration analytique de la notion de transfini, de la réflexion de Paul du Bois-Reymond (*Théorie générale des fonctions*, 1882[141]).

*

Cantor.

Deux ensembles, pose Cantor, sont *équivalents* lorsqu'il est possible de les associer terme à terme de telle sorte qu'à chaque élément de l'un corresponde un et un seul élément de l'autre. Et dans la mesure où ils sont équivalents, deux ensembles ont même *puissance* ou *nombre cardinal*.

Selon la terminologie de la théorie des ensembles - dont Cantor fut, avec Dedekind, le fondateur - on dit que deux ensembles sont équipotents si une bijection peut être établie entre eux.

[140] trad. fr. Paris, Gabay, 1970.
[141] trad. fr. Sceaux, Gabay, 1995.

L'infini actuel n'achève pas une série mais la transcende. L'infini n'est pas un nombre fini.

A un objet isolé, unique élément d'un ensemble, correspond 1 comme nombre cardinal. A partir de cet élément, l'adjonction successive de nouveaux éléments fournit une série illimitée de nombres cardinaux finis. Ce principe très élémentaire de formation constitue une première classe de nombres 1, 2, 3,… n qui sont tous finis et parmi lesquels on ne trouve pas de nombre maximum, puisque l'ensemble de cette classe de nombres est indéfinie. De sorte que si l'infini actuel existe, il ne peut être qu'au-delà et non vers la fin de la série. Nous l'avons dit, c'est là tout le problème du continu : comment faire un avec une succession interminable d'éléments. Et, après Leibniz (voir ci-après), Cantor de formuler ce qui est sans doute l'unique solution : ce un, c'est précisément l'infini ! *L'infini actuel est le continu même*.

L'infini, en effet, caractérise la série elle-même mais non l'un de ses termes, puisque celle-ci n'en a pas de plus grand. *Aussi étrange que cela puisse paraître, Cantor semble avoir été le premier a franchement raisonner à partir de ce constat que l'infini ne peut être un nombre fini !* Une telle réflexion était d'importance, comme le montrent, *a contrario*, les audacieux mais infructueux efforts de Fontenelle dans le calcul de l'infini.

Fontenelle et l'infini

Dans ses *Eléments de la géométrie de l'infini* (1727[142]), Fontenelle affirme que l'infini est un nombre et doit être traité comme tel. Ce qui signifie que les infinis peuvent avoir entre eux tous les rapports des nombres.

Objectera-t-on qu'un infini moindre serait par là même limité, donc non infini ? Une telle objection est inspirée par une conception "métaphysique" de l'infini identifiant celui-ci à une grandeur sans borne hors de laquelle il n'y a rien, souligne Fontenelle ; qui fut sans doute le premier à rechercher une définition mathématique et positive de l'infini : soit une grandeur plus grande que toute grandeur finie mais non pas plus grande que toute grandeur. Car, selon Fontenelle, des infinis peuvent être, sans paradoxe, supérieurs ou inférieurs à d'autres.

Cette idée avait déjà été soutenue par Robert Grosseteste au XIII° siècle, puis par Grégoire de Rimini au siècle suivant. Plus tard, en l'exposant, un certain Emmanuel Maignan (*Cursus philosophicus*, 1653[143]) en déduisait toutefois que les nombres infinis ne peuvent pas être de même espèce que les nombres finis[144].

[142] Paris, Klincksieck, 1995.
[143] 4 volumes, Tolosae, apud R. Bosc, 1653.
[144] Voir J-L. Gardies *Pascal entre Eudoxe et Cantor*, Paris, Vrin, 1984, p. 125.

Certes, reconnaît Fontenelle, une grandeur infinie ne peut être augmentée : $\infty+1 = \infty$. Mais, en même temps, l'infini a par essence vocation à pouvoir être augmenté sans fin. Il ne peut donc l'être que par l'infini et l'on peut poser 2∞, 3∞ et donc $\infty/\infty = 1$, $\infty/n\infty = 1/n$, etc.

Le nombre des nombres entiers.

Ce que Fontenelle désigne par "∞", c'est le nombre des nombres entiers. Le nombre des nombres. Dans leur suite, chaque nombre est égal au nombre de termes qui sont depuis 1 jusqu'à lui. Le nombre de tous ces termes est "∞". Nous ne nous en formons pas d'idée claire, mais nous savons que c'est un nombre distingué de tout autre, fini ou infini (I, 2, 86). C'est que l'infini relève d'une métaphysique trop élevée pour qu'il nous soit donné d'en apercevoir plus que quelques rayons, écrit Fontenelle.

Mais quant au raisonnement, il y a plus grave que ce mystère cependant. Car si l'infini est au terme d'une série inachevable, on ne peut tout simplement concevoir comment, dans la suite elle-même, s'effectue le passage du fini à l'infini. C'est un fait certain quoique incompréhensible, ne peut qu'avouer Fontenelle (I, 2, 86). Et de donner cet exemple bizarre (I, 3, 196-197) :

Posons les deux séries suivantes :

				B
A	*= 1, 2, 3, 4, …*	*n…*		*nn/∞*
A^2	*= 1, 4, 9, 16,…*	*nn[?*	*?*	*?]/* ∞^2

B marque le passage du fini à l'infini, soit la fin de la série des nombres entiers. nn est le plus grand carré que contient A. Mais sur A^2*, nn apparaît naturellement au même rang que n. Que peut-il donc y avoir en* A^2 *de nn jusqu'à B ?, se demande Fontenelle. Faut-il dire que dans* A^2 *les infinis viennent plus tôt que dans A ? Fontenelle avoue qu'il ne sait pas résoudre ce paradoxe et envisage que dans l'intervalle [nn, B[pourraient se loger des "infinis en mouvement", des fluxions (voir ci-dessus), c'est-à-dire des infiniment petits - ce qui paraît bien revenir à parler pour ne rien dire ou pour ne pas reconnaître que ce paradoxe démontre seulement la faille de son raisonnement !*

*

Le premier infini mathématique actuel.

L'ouvrage ne fut pas compris. Il fut vite oublié[145]. On était alors en pleine métaphysique du calcul infinitésimal et l'on crut que Fontenelle, parce qu'il calculait avec des infinis, plaidait pour la réalité des infinitésimaux. Dans les articles "Infini", "Limite" et "Calcul différentiel" de *L'Encyclopédie* (1751-1780[146]), d'Alembert s'en prend ainsi inlassablement à lui : une succession de grandeurs finies ne fait pas l'infini, écrit-il. L'idée d'un infini limité à un genre est absurde, car alors deux infinis seraient moins infinis que leur réunion. Etc.

D'une certaine façon, d'Alembert - comme aurait pu lui objecter Fontenelle - conserve une idée toute métaphysique de l'infini : un seul infini est concevable, écrit en effet d'Alembert, l'être

[145] Voir néanmoins Condillac *Les monades*, 1748, Grenoble, J. Million, 1994, II, chap. IV.
[146] reprint en 35 volumes, Stüttgart-Bad Cannstatt, F. Frommann Verlag, 1988.

infiniment parfait. En regard, Fontenelle ouvrait une voie qu'exploreront plus tard, avec davantage de succès, Bolzano (voir ci-après) et Cantor. Pour la première fois, en effet, était pensé un infini mathématique actuel[147].

Le transfini est le nombre des ensembles infinis.

Cantor nomme le nombre infini "transfini ordinal" - étant admis qu'il ne peut être un cardinal, n'étant pas un nombre qui achève une série - et le désigne par ω (*oméga*). Ce transfini est ainsi la limite vers laquelle tendent tous les nombres d'une classe car ω est un nombre entier. Et s'il ne clôt pas une série, il faut admettre qu'il en ouvre une autre. Il est le premier qui *suit* tous les nombres d'une classe qui est pourtant infinie, de sorte qu'il n'a pas de cardinal et est à la fois pair et impair, souligne Cantor.

Dans la mesure où ω est le rang du terme par lequel une série convergente atteint sa limite, on peut dire, en référence aux paradoxes de Zénon, qu'Achille rejoint la tortue au ωième moment. Le transfini représente un saut par dessus l'abîme de la continuité finie, qu'il fonde néanmoins. Il est extérieur à la série : *trans-fini*.

Transfini cardinal et transfini ordinal. A l'infini, le tout est égal à sa partie.

A ce nombre ω, en effet, on peut appliquer à nouveau le procédé d'adjonction successive et l'on aura un second principe de formation : $\omega + n$; $n\omega$; ω^{ω}, etc. Les nombres de cette deuxième classe n'ont, pas davantage que ceux de la première, de nombre maximum. Ils impliquent donc l'existence d'un nombre qui exprime la totalité de leurs termes et qui est supérieur à chacun d'eux. De là, la détermination d'un troisième principe de formation, etc. Nous avons à penser une infinité d'infinis.

Un ensemble infini comme **N** est constitué d'éléments finis. Il est, en d'autres termes, *dénombrable* (composé d'éléments finis). *Tout ensemble est infini et dénombrable s'il est équipotent à **N**.* La suite des nombres rationnels a la même puissance que la suite des nombres naturels. Tous les ensembles équivalents à l'ensemble des nombres naturels peuvent être rangés dans une même classe des ensembles dénombrables, *y compris chacune des parties de **N** et leur ensemble.* Cantor, ainsi, récuse l'idée que l'entendement est incapable d'appréhender l'infini. Mais celui-ci est défini en termes de classe et non plus de nombre : l'axiome que le tout est plus grand que la partie est vrai pour les nombres finis

[147] Voir M. Blay *Les raisons de l'infini*, Paris, Gallimard, 1993.

mais ce qui caractérise l'ensemble infini, au contraire, c'est qu'il est partie intégrante de lui-même.

Dedekind est le premier à avoir fait de cette singularité - à l'infini, le tout est équipotent à la partie - la définition même de l'infini et non pas seulement l'une de ses propriétés et encore moins la marque de son absurdité, comme le pensait Aristote (voir ci-dessus).

L'aleph, la puissance d'un ensemble dénombrable.

Cantor introduit la notation $\aleph_0$ (*aleph-zéro*) pour désigner la puissance de **N** ; la puissance d'un ensemble dénombrable infini c'est-à-dire composé d'un nombre infini d'éléments finis. $\aleph_0$ marque la puissance de l'ensemble de tous les nombres cardinaux finis, sans être égal à aucun d'entre eux. Si l'on ajoute un nombre n à l'ensemble des nombres cardinaux finis, ce nouvel ensemble est équivalent au premier, de sorte que :

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$

$$n \times \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \text{ (la partie est égale au tout)}$$

$\aleph_0$ est le plus petit *nombre* cardinal transfini. Il représente la puissance de **N** et de **Q**, composés de nombres finis mais non pas continus, puisqu'il existe des nombres irrationnels qui ne leur appartiennent pas. Seul **R** est pleinement continu - c'est-à-dire dense - et sa puissance $\aleph_1$ marque "la puissance du continu".

La portée de cette réflexion, a-t-on écrit, est immense, car elle introduit en Analyse des raisonnements d'une nature totalement nouvelle. Le continu, ainsi, n'est plus l'opposé du discret mais, comme déjà avec la notion de coupure, nous l'avons vu, l'un conduit à l'autre[148].

R n'est pas dénombrable.

La question de savoir s'il existe une bijection entre **N** et **R** - soit de savoir si **R** est dénombrable - fera l'essentiel de la correspondance de Cantor et de Dedekind à partir de 1873. Dans une lettre à Dedekind du 7 décembre 1873, Cantor démontre qu'il n'existe pas de bijection entre **N** et l'intervalle]0, 1[[149].

[148] Voir P. Tannery « Le concept scientifique du continu. Zénon d'Elée et Georg Cantor » *Revue philosophique* T. XX, 1885, pp. 385-410.

[149] Voir J. Dieudonné (dir) *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Paris, Hermann, 1978, pp. 279 et sq. Ainsi que P. Dugac *op. cit.*, chap. XI. La correspondance Cantor-Dedekind de 1872-1889 est publiée in J. Cavaillès *Oeuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris, Hermann, 1994.

On peut démontrer cette non-dénombrabilité de **R** à partir de "l'axiome de Cantor" : dans **R**, soit un ensemble d'intervalles I_1, I_2, … tel que pour tout couple d'intervalles I_m et I_n, l'un soit forcément inclus dans l'autre, définissant un système d'intervalles emboîtés, il existe au moins un nombre réel appartenant à tous les intervalles. Soit donc l'ensemble de tous les points de l'intervalle [0, 1], 0 = x = 1 est non-dénombrable car il existe au moins un nombre ξ (*ksi*) de l'intervalle qui est différent de la suite de tous les x_n de la suite des nombres rationnels considérés. Partageons en effet l'intervalle en trois intervalles égaux, puis l'un de ceux-ci encore en trois. Un élément x_1 ne saurait appartenir à chacun des intervalles définis. Soit I_{n+1}, l'une des trois parties égales de I_n, I_{n+1} ne contient pas ξ_{n+1}. Or d'après l'axiome, il existe pourtant ξ qui ne fait pas partie de la suite dénombrable. Les nombres irrationnels comme x sont notamment les racines d'équations de la forme $a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$ ou les coefficients a_0, a_1, … sont des entiers.

Les nombres irrationnels sont autant de points-limites. *Un ensemble continu est un ensemble dont tous les points sont de tels points-limites*, ce qui arrive lorsque les nombres sont définis comme autant de possibles coupures. Le continu est d'une puissance infiniment supérieure à l'infini dénombrable. C'est un ensemble "bien enchaîné", dit Cantor, qui fournit ainsi, après Dedekind, une *définition analytique du continu* : étant donné deux points quelconques p_0 et p de cet ensemble, on peut trouver dans le même ensemble une suite de points p_1, p_2, … p_u (en nombre fini n) telle que les distances entre deux points consécutifs soient toutes inférieures à un nombre donné e, si petit soit-il.

Comme Dedekind, déjà, nous l'avons vu, Cantor aboutit ainsi à un continu discret ; "où plus rien n'est indistinct", a-t-on écrit[150]. Si l'intuition première du continu correspond à la perception d'une unité dans la multiplicité, Cantor fonde le continu uniquement sur la multiplicité. Cette continuité ordinale est la seule continuité primitive et absolue par rapport à laquelle toute grandeur - ou continuité métrique - est relative[151].

Avec Cantor, les propriétés du transfini, commente L. Brunschvicq (*op. cit.*, p. 388), deviennent le critérium de la logique des nombres. *Le fini est toujours défini à partir de l'infini et non l'inverse*.

*

2. 3. 11.

L'hypothèse généralisée du continu.

[150] A. Darbon *op. cit.*, p. 110 et sq.

Nous pouvons à présent concevoir que les nombres cardinaux transfinis se rangent par ordre de grandeur et forment un ensemble bien ordonné : $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$ … jusqu'à $\aleph_\omega$, qui est immédiatement supérieur à tous les $\aleph_n$. Et ainsi de suite. Mais comment fonder leur continuité ? Forment-ils une suite continue ? Existe-t-il ainsi des ensembles infinis de taille intermédiaire entre N et R ? C'est là ce qu'on nomme "l'hypothèse généralisée du continu".

Nous avons vu que la définition même du transfini tient au fait que le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble infini est supérieur au cardinal de cet ensemble : aucun ensemble, en d'autres termes, ne peut être mis en bijection avec l'ensemble de ses parties, puisqu'un ensemble de n éléments possède 2^n parties. Dans le cas d'un ensemble infini, cela invite à considérer une succession d'infinis. Ainsi, avec $\aleph^o$ l'infini dénombrable de N, l'ensemble des parties de N est $2\aleph^o$ et la question est de savoir si $2\aleph^o = \aleph_1$ et plus généralement si : $2\aleph^a = \aleph_{a+1}$? Or c'est ce que Cantor n'est jamais parvenu à démontrer et qui est, nous le savons depuis les travaux de Kurt Gödel (1938) et de Paul Cohen (1963), indémontrable dans la théorie des ensembles[152]. L'hypothèse du continu, cela a été démontré, est indécidable.

Gödel démontre que l'hypothèse du continu n'est pas contradictoire avec la théorie des ensembles axiomatisée (ou ZFC : Zermelo + Fraenkel + l'axiome de Choix) si celle-ci n'est pas contradictoire. Mais Cohen démontre aussi bien que la réfutation de l'hypothèse du continu n'est pas non plus contradictoire avec ZFC. L'hypothèse paraît donc indécidable, ce qui a souvent fait croire à son caractère tout à fait spéculatif. Certains, ainsi, n'ont pas renoncé à chercher à décider entre l'hypothèse et sa réfutation, comme Hugh Woodin[153].

Intuitionnisme mathématique. L'infini n'est qu'une potentialité qui ne renvoie à rien de réel.

Les idées de Dedekind et de Cantor soulevèrent de nombreuses objections chez leurs contemporains. Certains ayant même considéré que Cantor était tout simplement fou et ses transfinis, comme disait Henri Poincaré, une maladie dont il faudrait un jour guérir les mathématiques.

Folie de Cantor ?

[151] Voir L. Couturat *Les principes des mathématiques*, Paris, Alcan, 1905, p. 91 et sq.
[152] Voir (collectif) *Penser les mathématiques*, Paris, Points Seuil, 1982, note pp. 136-139.
[153] Voir L. Bellotti « Woodin on the continuum problem: an overview and some objections » *Logic & Philosophy of science*, III-1, 2005.

On a dit que ses recherches - ainsi que les furieuses attaques qu'elles recevaient de la part de mathématiciens comme Leopold Kronecker, qui le traitait de "corrupteur de la jeunesse" - rendirent Cantor à moitié fou. De fait, il connaîtra de graves dépressions et devra être hospitalisé. A partir de 1884, il délaissera pendant près de douze ans le transfini pour se consacrer à des spéculations théologiques sur l'infini. Il s'attachera également inlassablement à déterminer si Francis Bacon fut l'auteur des pièces de Shakespeare !

Cantor invitait à considérer que le continu est un infini actuel. A quoi s'opposèrent tous ceux pour lesquels il n'est d'infini que potentiel. Ils se rangèrent d'abord sous le registre de l'intuitionnisme mathématique. Nouvelle façon de dire que tout nombre se réfère à une réalité, à une grandeur - à quelque chose que l'on peut se représenter.

Poincaré.

Henri Poincaré, ainsi, fut un grand adversaire du formalisme arithmétique, considérant que le passage d'un nombre au suivant est une sorte de pouvoir inné de l'esprit humain et non une convention posée par le jeu d'une axiomatique.

Le point de vue de Poincaré est intuitionniste : la vérité d'un énoncé mathématique, selon lui, ne dépend pas uniquement de l'enchaînement dans lequel il s'insère mais doit être validée en acte, c'est-à-dire dans une intuition (voir par exemple *La logique de l'infini*[154]).

Un objet mathématique correspond à une réalité. Or, aucune proposition concernant les collections infinies ne peut être évidente par intuition, note Poincaré. Donc, tout théorème sur les nombres infinis ne peut être qu'une façon abrégée d'énoncer des propositions sur les nombres finis. L'infini n'est qu'une formule qui nous dispense de compter à l'infini des réalités finies. Sinon, le théorème n'est pas vérifiable. Il n'a aucun sens (§ 6).

En d'autres termes, comme il n'existe pas d'ensembles *effectivement* infinis, il n'est pas d'autre infini que potentiel. Dans l'idée de limite, ainsi, l'infini n'a qu'une existence provisoire et purement fictive. Ce n'est pas là un infini actuel, écrit un auteur[155]. Ce n'est qu'un pseudo-infini, l'infini du devenir, qui se prolonge sans terme dans la pensée mais qui a commencement et fin dans les choses.

Brouwer.

[154] in *Dernières pensées*, Paris, Flammarion, 1913.
[155] Voir F. Evellin *Infini et quantité*, Paris, Germer Baillière, 1880, p. 261.

Pour les partisans de l'intuitionnisme mathématique, dont le plus célèbre est Luitzen Brouwer, la continuité de la suite des entiers naturels relève ainsi d'une intuition première intraduisible dans le langage axiomatique : la division de l'unité, à la source de la notion de nombre entier (*Intuitionism and Formalism*, 1912[156]). "Dieu a créé les nombres naturels, écrivait de même Leopold Kronecker. L'homme a fait tout le reste".

Il n'y a donc aucun sens à poser l'existence de réalités mathématiques indépendamment de l'appréhension que nous pouvons en avoir. Les êtres mathématiques n'existent que dans l'acte par lequel ils sont engendrés. On ne peut que rejeter, ainsi, les termes qui dépassent les limites de la pensée claire. Un "*aleph*" ainsi ne dénote rien, car il n'est pas accessible par un acte effectif de l'esprit.

Les transfinis n'ont aucun intérêt mathématique car ce sont des êtres tout à fait inaccessibles, déclare René Thom. Le fruit d'une imagination délirante (*Prédire n'est pas expliquer*, 1991, p. 96[157]).

Brouwer demande si la suite de nombres "*777*" apparaît quelque part dans le développement de π ? Il n'admet pas qu'on puisse, selon le principe du tiers exclu, tenter de répondre par oui ou par non, puisqu'on n'est pas en mesure de construire explicitement - c'est-à-dire intuitivement - ce qui est en question. L'infini n'a d'autre réalité, selon lui, que la possibilité de continuer indéfiniment une série. Le continu est une réalité en libre devenir.

Dans un article (*Transfini et continu*, 1940[158]), Jean Cavaillès met précisément en cause ce point de vue intuitionniste.

D'autres encore, comme le mathématicien Hermann Weyl (*Le continu*, 1918[159]), rejetèrent également la conception ensembliste du continu, arguant qu'un ensemble est par essence constitué d'éléments discrets, tandis que le continu a des parties mais pas "d'éléments".

Pour H. Weyl, le continu par excellence reste le temps (pp. 110-111). Or, note Weyl en une phrase qui pourrait être de Bergson (voir 2. 2. 6.), "du stable accolé à du stable ne fera jamais rien qui dure". Weyl retrouve le point de vue de Poincaré : le passage, continu, d'une partie à une autre ne relève pas d'un dénombrement ou d'un calcul.

---

[156] *Collected works I*, Amsterdam, North-Holland, 1975.
[157] Entretiens avec E. Noel, Paris, Eshel, 1991.
[158] Paris, Hermann, 1947.
[159] in *Le continu et autres écrits*, trad. fr. Paris, Vrin, 1994.

Plus tard, l'Analyse non standard parlera elle aussi de la "non-compositionnalité" dans l'interprétation mathématique de la continuité - l'insécabilité essentielle du continu interdit d'en faire le composé de ses points (modèle du "continu-discret" de Harthong-Reeb)[160].

Pour René Thom, l'idée que le continu puisse s'engendrer à partir de la générativité de l'arithmétique n'est qu'un mythe de la pensée mathématique contemporaine (*L'antériorité du Continu sur le Discret*, 1992[161]). La vérité, souligne Thom, c'est que la suite des entiers naturels est typiquement une suite discrète d'entités, tandis que le continu archétypique doit être identifié à un espace ayant la propriété d'une homogénéité parfaite : deux points différents y sont toujours équivalents, comme par un glissement continu de l'espace sur lui-même. Cette continuité parfaite est indicible. Elle ne porte aucune marque, ni direction, ni points. Rien ne lui est identifiable.

*

Wittgenstein. La possibilité n'est pas l'être, sinon par un abus de langage.

Dans le continu, nous ne voyons pas de parties, encore moins une infinité de parties, note Ludwig Wittgenstein (*Grammaire philosophique*, 1933[162]). Lorsqu'on dit que l'espace est divisible à l'infini, souligne Wittgenstein, cela veut justement dire qu'il n'est pas constitué de parties individuelles et qu'une division ne l'atteint pas. L'infini désigne ainsi un caractère logique (la possibilité d'une division ou d'une prolongation indéterminées) de notre manière de parler de l'espace mais non une propriété de l'espace lui-même. De même, il est de la nature *logique* du temps d'être infini (*Remarques philosophiques*, 1930, 139-140[163]). *L'espace et le temps ne sont pas des collections de points mais correspondent à la réalisation d'une loi*. L'infini est une qualité interne de leur forme (*ibid*., 177).

Pour Wittgenstein, le continu est une qualification du concept logique de possibilité et n'est jamais une totalisation actuelle[164]. Dans l'infini, la possibilité n'est pas l'être, sinon par un abus de langage (*Remarques*, 141). Le mot infini a une autre syntaxe que celle d'un adjectif numéral. C'est pourquoi Wittgenstein rejette la définition de l'infini par Dedekind de l'équipotence d'un ensemble avec l'une de ses parties. Car on parle alors de bijection et

---

[160] Voir J-M. Salanskis *Le Destin du Modèle de Cantor-Dedekind* in J-M. Salanskis & H. Sinaceur (Eds) *Le labyrinthe du continu*, Paris, Springer Verlag, 1992.
[161] in J-M. Salanskis & H. Sinaceur (Eds) *Le labyrinthe du continu*, 1992.
[162] trad. fr. Paris, Gallimard, 1980. Voir J. Bouveresse *Weyl, Wittgenstein et le Problème du Continu* in J-M. Salanskis & H. Sinaceur (Eds) *Le labyrinthe du continu*, 1992.
[163] trad. fr. Paris, Tel Gallimard, 1975.
[164] Voir F. Schmitz *Wittgenstein, la philosophie et les mathématiques*, Paris, PUF, 1988, p. 108 et sq.

d'ensemble en un sens qui n'est pas celui qu'on appliquerait dans le fini. Rapporter une rangée d'arbres à l'une de ses parties n'a aucun sens. Si la définition de Dedekind est "parlante", c'est qu'elle présuppose en fait ce qu'elle veut prouver : l'absence de limite de la succession des nombres à l'infini.

Tout de même, c'est l'usage illustratif que l'on fait de la droite qui semble donner sens à l'idée de coupure. Les nombres irrationnels font comme autant de "trous" dans la droite[165]. La démonstration de Dedekind, écrit Wittgenstein, fonctionne à partir d'une image trompeuse - celle d'une coupure en un point, comme un vide qui pourrait ne pas être rempli - image qui justifie la démonstration alors qu'elle devrait plutôt être justifiée par elle (*Remarques sur les fondements des mathématiques*, posthume 1956, pp. 241-242[166]).

On peut toutefois se demander si ce n'est pas là comprendre totalement à l'envers la démarche de Dedekind !

Ce n'est pas parce qu'on calcule à l'infini que l'infini est.

π ou $\sqrt{2}$ n'ont rien à voir avec un nombre comportant une infinité de décimales que Dieu pourrait connaître en tant que tel, note Wittgenstein. Ils sont simplement ce qu'on peut en calculer. Ils correspondent à un développement réglé par une loi et non à un objet. Et la loi qui permet de les calculer n'est pas énoncée à titre de substitut, pour pallier l'impossibilité de donner le nombre achevé. En mathématique, description et objet sont équivalents (*Grammaire philosophique*, p. 461 et sq.).

Le point de vue de Wittgenstein est donc opposé à tout intuitionnisme. La difficulté qu'on rencontre face à l'infini est, selon lui, précisément de résister à la pensée que la possibilité est "l'ombre de la réalité" (p. 286). Comme si l'infini restait toujours "à découvrir". Comme s'il était.

Ce n'est pas, pour Wittgenstein, que l'infini soit tellement immense qu'il échappe à nos prises, comme pour Brouwer. L'infini n'existe pas, au sens d'une réalité mondaine. Il ne représente pas même un nombre et c'est un non-sens de penser qu'un grand nombre est plus proche de l'infini qu'un petit. Le fait que la divisibilité n'ait pas de limite est toute l'infinité. "Rien d'étonnant à ce qu'on ne puisse expliquer l'infini que par lui-même, écrit Wittgenstein, c'est-à-dire à ce qu'on ne puisse l'expliquer" (*Remarques philosophiques*,

[165] Voir J. Bouveresse *Le pays des possibles*, Paris, Minuit, 1988, p. 135 et sq.
[166] trad. fr. Paris, Gallimard, 1983.

138). L'infini n'a pas à être rejoint par une expérience, affirme finalement Wittgenstein. Mais, dès lors, ses notations sur l'infini sont étonnamment courtes par rapport à l'enjeu.

*

2. 3. 12.

Que l'infini soit non pas une réalité objective mais une règle de pensée, c'est bien ce que Dedekind et Cantor invitent à reconnaître. Mais alors, si en mathématique description et objet sont équivalents, comme l'admet Wittgenstein, *force est d'admettre l'infini actuel !* Certes, celui-ci n'est pas intuitionnable. Mais il n'est pas coupé de toute représentation, bien que celle-ci soit intelligible et non sensible. L'esprit ne voit pas une étendue infinie, notait Malebranche. Pour cela, il faudrait qu'il soit infini lui-même… Mais l'esprit voit actuellement que son objet immédiat est infini. *Non parce qu'il n'en voit pas le bout mais parce qu'il conçoit clairement qu'il n'en a point*. Tout de même qu'on ne découvre pas en tâtonnant que l'hyperbole et ses asymptotes s'approcheront toujours sans jamais se joindre (*Entretiens sur la métaphysique*, 1696, I, IX[167]).

De sorte qu'on peut maintenant mieux saisir l'enjeu intellectuel lié à l'acceptation ou au refus de l'infini actuel. *La voie ouverte par Leibniz puis Fontenelle, qui ne trouvera véritablement son essor qu'au XIX° siècle, consistait à interroger la possibilité d'une pensée, dont la rigueur déductive est assurée mais qui se passe de toute intuition, voire même de toute représentation. Une pensée pour laquelle le vrai n'est plus l'évident. C'est exactement le problème que les avancées de la mécanique quantique reposeront deux siècles plus tard. C'est tout le problème de savoir ce qu'on entend par réalité* (voir 2. 1.). Hermann Cohen a, sous une perspective kantienne, particulièrement souligné ce point. *Le calcul différentiel nous débarrasse de l'habitude qui consiste à exiger d'emblée un donné sensible comme réquisit de la vérité objective*, remarque Cohen, qui voit dans la grandeur infinitésimale le "levier idéaliste de toute connaissance de la nature" (*Le principe de la méthode infinitésimale et son histoire*, 1883[168]).

Le véritable enjeu de l'infini actuel.

Penser l'infini actuel, c'est reconnaître la validité d'un discours logique ne trouvant sa vérité qu'en lui-même, quitte à décevoir cette exigence de sens dont Descartes trouvait

[167] in *Oeuvres*, 2 volumes, Paris, Pléiade Gallimard, 1950.
[168] trad. fr. Paris, Vrin, 1999.

justement le plus bel exemple dans la mathématique. Exigence qui lui fit manquer la fécondité des algorithmes infinitésimaux qui étaient en train de naître sous ses yeux.

Comme l'a montré Jules Vuillemin, Descartes était en possession de bien des procédés pour résoudre les problèmes de l'analyse (*Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, 1960, chap. II[169]). Le premier, il aperçut que l'intégration est une opération inverse de la détermination de la tangente à une courbe (*Lettre à Florimond de Beaune*, le 20 février 1639). Mais Descartes refusait d'admettre aucune entité géométrique ne reposant pas sur une intuition claire et distincte.

Ainsi, montre J. Vuillemin (p. 57), sa méthode pour le calcul des tangentes contient implicitement une théorie de la tangente comme limite de la sécante tournant autour de l'un de ses points (et non plus, comme pour Fermat, comme une droite n'ayant qu'un seul point commun avec la courbe). Mais cette méthode ne repose, pour Descartes, que sur l'égalité algébrique des racines de l'équation du cercle tangent à une parabole (*Lettre à Hardy*, juin 1638). C'est que Descartes ne trouve aucune signification géométrique à l'idée de limite[170].

Les mathématiciens jésuites eurent les mêmes difficultés face aux indivisibles de Cavalieri, rompant par trop avec l'idéal d'une science mathématique déductive allant du simple au complexe qu'avait fixé Christophe Clavius (1538-1612)[171].

Deux formes de rationalisme.

Pour Descartes, un énoncé est valide s'il peut être réduit à un jeu de relations claires entre des éléments intuitifs simples. La sûreté de la déduction tient ainsi à une chaîne d'évidences. Une idée est vraie si elle épuise entièrement l'essence dont elle est la représentation.

Cette méthode, Descartes la trouvait particulièrement à l'œuvre dans les mathématiques. Mais avec le calcul infinitésimal apparurent des concepts qui échappent à toute intuition. Les différentielles, en effet, sont indéterminées, au sens où elles ne dérivent pas de quantités premières qui en imposent la loi de progression. De sorte qu'en regard, Descartes reste attaché à cet intuitionnisme mathématique qui entend toujours lier le mouvement de la pensée au contenu de la représentation[172].

Nous avons vu que cette attitude se maintiendra : contre les infinitésimaux comme contre les transfinis cantoriens. Léon Brunschvicq (p. 537) y voit à l'œuvre l'affrontement entre deux formes opposées du rationalisme. Selon le point de vue intellectualiste qui est

---

[169] Paris, PUF, 1960.
[170] Voir la *Lettre à Clerselier*, de juin ou juillet 1646, dans laquelle Descartes résout l'*Achille* de Zénon.
[171] Voir A. Alexander I*nfinitesimal: how a dangerous theory shaped the Modern World*, Scientific American/Farrar, Straus & Giroux, 2014.

celui des cartésiens, l'idée est une action de l'esprit se traduisant par un gain en compréhension et en certitude. De ce point de vue, on ne peut que rejeter tout infini actuel parce qu'on ne trouve rien de réel en lui.

A l'opposé, en un sens que Brunschvicq qualifie "d'aristotélicien", l'idée est un concept que l'on peut saisir en lui-même et pour lui-même, même si l'on s'épuise dans l'effort pour l'enfermer dans une définition première. Ces deux approches, souligne Brunschvicq, dont l'antagonisme latent paraît dominer l'histoire de la philosophie, sont pourtant rarement distinguées.

Quoi qu'il en soit, nous pouvons comprendre à présent que l'infini actuel sera reconnu par tous ceux pour lesquels l'intelligibilité donne la clé de la réalité plus que la représentation. Leibniz en est le meilleur représentant.

*

Leibniz. L'infini n'est pas un nombre mais une opération.

Pour Leibniz, l'infini ne tient qu'à un algorithme. Dès lors, *l'intégration ne peut passer pour une sommation, au sens où elle n'additionne pas des quantités déterminées. C'est un calcul qui s'est libéré du nombre pour ne considérer qu'une fonction, c'est-à-dire la détermination de valeurs variables.*

Leibniz ne manquait jamais une occasion de souligner le caractère insuffisamment général de l'algèbre de Viète ou de Descartes, simple théorie des équations dont les termes connus ou inconnus sont des nombres, alors que Leibniz voulait tendre vers une "mathématique universelle", dont les objets ne seraient pas seulement des quantités et qu'il définissait comme "une science de ce qui tombe en général sous l'imagination"[173]. Cette logicisation de la mathématique ne prendra néanmoins son essor que plus d'un siècle plus tard avec Gauss, Bolzano et Dedekind.

Nous l'avons vu, Leibniz avoue souvent à ses correspondants ne pas être bien assuré quant à la nature des infinitésimaux, de ces parties qui se somment à l'infini. Le calcul ne nous donne en effet aucun infini en tant que tel : une aire finie est égale à une série infinie sans que celle-ci puisse être réduite à un nombre. Mais, ajoute Leibniz, dans la mesure où une série est constituée par une loi de progression unique, l'esprit conçoit son

---

[172] Voir particulièrement Y. Belaval *Leibniz critique de Descartes*, Paris, Tel Gallimard, 1960, chap. V.
[173] Voir G-G. Granger « Philosophie et mathématique leibniziennes » *Revue de métaphysique et de morale* n°1, 1981, pp. 1-37.

infinité adéquatement. Nous concevons clairement qu'une hyperbole se prolonge à l'infini non par quelque défaut mais bien parce qu'elle y est positivement déterminée par sa loi. L'infini est une opération. Malebranche, nous l'avons vu, ne disait pas autre chose.

En France, les malebranchistes, comme le marquis de L'Hospital, seront les ardents défenseurs du calcul infinitésimal à l'Académie des Sciences, s'inspirant bien davantage de Leibniz que de Newton[174].

C'est là encore ce que redira Wittgenstein (voir ci-dessus) - mais sans paraître en saisir réellement la portée. Car une fois reconnu que l'infini est intelligible - à défaut d'être représentable - il n'y a pas de raison de le limiter au calcul. Les êtres mêmes ont une certaine infinité. "Je suis tellement pour l'infini actuel, écrit Leibniz dans une lettre, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son auteur" (*à Foucher*, le 26 mai 1692). Les indivisibles, cependant, ne sont pas des parties. Le continu n'en est pas composé. Il faut donc dire qu'il n'y a aucune partie de la nature qui ne soit non pas divisible mais actuellement divisée (8 août 1693, p. 121). De sorte qu'il n'y a pas de figure précise et arrêtée dans les corps (*Fragment*, p. 244[175]).

Les commentateurs n'ont pas manqué dès lors de relever cette apparente contradiction entre le refus de reconnaître une réalité aux infinitésimaux et l'affirmation selon laquelle tout dans le monde est sous-divisé sans fin (*Monadologie*, 1714, § 65[176]), de sorte qu'il y a un monde dans la moindre partie du monde (§ 66).

Le monde est plein.

A l'origine de la réflexion leibnizienne, il y a le souci très cartésien d'exonérer Dieu d'avoir à intervenir dans le cours du monde, d'y produire des effets particuliers et d'avoir dû le créer à travers différents actes ponctuels. Car une telle vision prête à Dieu une sagesse et une puissance par trop bornées.

Dieu a créé *un* monde et ce monde n'est pas Dieu car il était un parmi une infinité d'autres mondes possibles (nous allons voir pourquoi). Et ce monde participe de l'infinité divine en ce qu'il est *un* monde. C'est à dire qu'il est plein, *continu*. La nature ne fait pas de saut, se plait à répéter Leibniz, qui est le premier à identifier l'infini à la puissance du

---

[174] Voir A. Robinet « Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France » *Revue d'histoire des sciences*, T. XIII n°4, 1960, pp. 287-291.
[175] *Lettres et opuscules inédits de Leibniz*, Paris, Ladrange, 1854. Les *Lettres à Foucher* y apparaissent également.
[176] Paris, Delagrave, 1978.

continu. C'est pourquoi il n'y a pas d'infini en acte : il n'y a pas de ligne, pas de nombre infiniment grand ou infiniment petit. Mais chaque être est un infini actuel. Chaque être ou plutôt son idée, son essence, est relevable d'une analyse infinie. Il est impossible de le comprendre totalement sans comprendre tout l'univers.

Chaque être saisi dans sa notion est une *monade*. Ce qui recouvre son degré de perception de l'univers. Ces points ne peuvent être développés ici. Voir 3. 4. 2.

L'infini est une expression de l'univers.

Si l'univers est un, cela ne signifie pas que tout y est confondu mais que rien ne peut être posé, être compris, sans inclure l'univers entier. Chaque être est l'expression particulière d'une même substance qui elle-même exprime Dieu. La notion d'un être, ainsi, enveloppe tout : ce qu'il est, ce qui lui arrivera et tout le reste de l'univers. Les replis d'une âme vont à l'infini (*Monadologie*, § 61).

L'infini est une expression. Il traduit une continuité : tout dans l'univers est à sa façon l'univers. Et cette continuité repose elle-même sur le fait qu'il existe des êtres distincts. C'est un principe leibnizien essentiel que celui des indiscernables ou plus exactement de l'identité des indiscernables : les êtres qui ne diffèrent entre eux que par leur position dans l'espace et le temps mais par aucun caractère intrinsèque sont indiscernables, c'est-à-dire ne forment qu'un seul et même être. Réciproquement, chaque être possède en soi quelque caractère qui le distingue. L'infini est la justification du fini - de la fragmentation infinie de l'être. L'infini est la continuité du fini, dans la mesure où l'on ne peut a priori assigner de bornes à l'univers, à l'ensemble de ce qui est fini. En même temps, on ne peut concevoir qu'un être soit totalement coupé du reste de l'univers – il serait à lui seul un univers. L'infini se fonde sur le fait que le fini est premier : de proche en proche, chaque être contient tout l'univers. En chaque être, l'univers converge. *Chaque être est une limite pour l'univers*. A partir de là, l'infini est partout : dans ce qui peut être multiplié (les distances, les durées) ou divisé (la matière). Le principe des indiscernables pose néanmoins que ces opérations de multiplication et de division ne multiplient pas des êtres distincts. Ceux-ci, les monades, doivent donc être distincts par eux-mêmes, par leurs caractères, donc selon leur notion. Et dans la mesure où l'on ne peut concevoir de bornes à l'espace, à la matière ni au temps, il faut admettre que ces êtres sont infinis. La multitude

des âmes ne doit pas nous faire de peine, écrit Leibniz à Arnaud ! (*Correspondance avec Arnaud*, le 30 avril 1687[177]).

Pourquoi tant d'êtres et comment ces êtres peuvent-ils se regrouper pour former différents êtres ? C'est là l'action d'un "lien substantiel" (*vinculum substantiale*), qui renvoie lui-même à un choix de Dieu, que Leibniz comprend en termes d'optimum. Ce point, qui correspond à l'optimisme leibnizien, ne peut être développé ici (voir 3. 4. 2.). Retenons seulement que si un choix divin doit être invoqué, c'est qu'on ne peut trouver d'autre nécessité à l'existence des êtres. Cela suffit logiquement à désigner ce monde comme contingent puisque rien ne nous interdit de penser que d'autres êtres auraient pu faire un autre monde.

La réalité de l'infini, en tous cas, n'est pas celle d'une sommation. L'infini, dit Leibniz, peut être compris s'il n'est pas conçu comme un tout (*Nouveaux essais sur l'entendement humain*, posthume 1745, II, chap. XVII[178]). L'infini est une intégration : à un mouvement peuvent être trouvés des éléments infinitésimaux, comme dans le bruit de la mer on entend celui de chaque vague. Mais l'infini actuel est cette opération, non les éléments issus de sa décomposition. Le monde est continu : chacune de ses parties peut être divisée à l'infini. De sorte qu'il n'y a point de figure précise et arrêtée dans les corps (*Démonstration qu'il n'y a point de figure précise et arrêtée dans les corps à cause de la division actuelle des parties à l'infini*, sd[179]). Mais chaque être est nettement individué. Le principe de l'identité des indiscernables ne contredit pas le principe de continuité. *L'infini tient à ce qu'on ne peut rien caractériser de fini en soi mais seulement dans son rapport à ce qui n'est pas lui. Nous verrons ci-après que Hegel ira au bout de cette idée de Leibniz, qui est à mille lieux de ce qu'on entend couramment par « infini ».*

Le principe de continuité.

Au total, l'infini est posé par le principe de continuité qui signifie les mêmes choses sous différents aspects. Au sens métaphysique, nous l'avons vu, que chaque substance exprime l'univers entier. Et au sens de l'explication causale, que tout peut être compris à partir de ce en quoi il s'origine. Si la nature ne fait pas de saut, c'est qu'il n'est rien qui ne puisse être reconnu dans ce qui lui est proche. De sorte qu'on ne peut comprendre que par continuité. Ainsi, par exemple, la folie n'est pas l'autre de la raison et on doit donc trouver dans le fonctionnement normal de l'esprit quelque chose qui l'annonce et l'explique ou la rend au moins possible. Tout dans la notion d'un être et de ce qui l'affecte peut, en droit,

[177] Paris, Vrin, 1988.
[178] Paris, Garnier-Flammarion, 1966.
[179] in *Lettres et opuscules inédits*, Paris, De Lagrange, 1854.

être compris à travers une analyse – en principe infinie (à défaut, nous devons nous contenter de l'expérience). Sinon, cet être serait un monde en soi.

Au sens physique, enfin, le principe de continuité pose que tous les êtres forment une chaîne dont la gradation est parfaite. "Rien ne se fait tout d'un coup, disait Leibniz, et c'est une de mes grandes maximes" (*Nouveaux essais*, Préface). Rien n'est sans cause.

Cette continuité physique ne joue néanmoins qu'entre les êtres qui existent, ce qui est souvent mal compris. Cela ne revient pas à dire en effet que tout ce qui peut être est mais que tout ce qui est forme un seul monde – encore une fois, l'infini se tire du fini chez Leibniz. Il y a des êtres distincts entre eux. C'est un fait d'existence. Le fini ne se tire pas de l'infini : ces êtres ne sont pas tout ce qui pouvait être (ce qui est l'idée épicurienne, inspirant un Giordano Bruno). Une telle production de tous les possibles, montre Leibniz, ne ferait pas un monde. Elle accumulerait des indiscernables. Il est raisonnable d'admettre qu'il existe des êtres intelligents au dessus de nous. Mais nous n'en connaissons aucun ! (*Nouveaux essais*, IV, chap. III). Et leur possibilité n'assure pas leur existence. L'espace est plein d'une matière fluide, c'est-à-dire susceptible de toutes les divisions mais divisée inégalement en différents endroits, à cause des mouvements qui y sont conspirants (*Nouveaux essais*, Préface). Il y a des espèces qui n'ont jamais été et ne seront jamais, n'étant pas compatibles avec la suite de créatures que Dieu a finalement choisie (III, chap. VI). En regard, un monde où tous les possibles seraient produits n'aurait aucune forme - on y buterait incessamment sur un type d'argument que l'on nomme "sorite" : à partir de combien de grains dispose-t-on d'un tas de blé ? Si l'on arrête un chiffre, peut-on admettre que ce chiffre moins un élément ne forme pas un tas ? Etc[180]. Comme toute qualité, une forme ne se saisit pas dans la quantité.

Ce que l'on nomme la « logique floue » (*fuzzy logic*) permet de traiter ce genre de cas puisque le degré de vérité d'un énoncé peut y être compris entre 0 et 1[181].

NB : on appelle également "sorite" un syllogisme composé d'un grand nombre de propositions. Voir 1. 6. 31.

*

On remarque souvent que Leibniz pose tout à la fois la continuité, c'est-à-dire la possibilité d'une transition entre tous les existants et, avec le principe des indiscernables,

[180] Voir P. Egré *Qu'est-ce que le vague ?* Paris, Vrin, 2019.
[181] Voir S. Keefe & P. Smith *Vagueness: a reader*, Cambridge Mass., MIT Press, 1999.

une irréductible discontinuité des êtres[182]. Pour le comprendre, nous venons de le voir, il faut considérer que l'infini se tire du fini et non le contraire. Il faut comprendre l'infini comme une opération et non comme une réalité.

Le continu n'est pas quelque matière, quelque étendue au sens cartésien, qui ferait la substance physique des êtres. La continuité est une chose idéale, écrit Leibniz (*à Varignon*, 20 juin 1702). Les deux principes de continuité et de discernabilité sont inséparables. Si un être peut être dit existant, c'est qu'il possède une détermination, une raison suffisante qui le distingue de tout autre. De sorte que le terme de la science est la connaissance de l'individuel dans sa contingence. Mais, pour être comprise, la raison de chaque être suppose le monde entier. *Chaque être est la limite du monde*. Pour connaître une substance, il n'est besoin d'aucune autre. Chaque être a sa raison - et c'est pourquoi Leibniz rejette l'atomisme, qui admet des entités élémentaires indifférenciées. Mais pour comprendre une substance, il nous faut prendre en considération le monde entier. Aucun être n'existe de soi.

Plotin

En tout ceci, Leibniz retrouve Plotin avec une exactitude étonnante, quoique la filiation directe ne puisse être attestée[183].

Platon refusait d'admettre qu'il y a des Idées des choses particulières et pour Aristote, l'individuation des substances intervenait par la rencontre de leur forme avec la matière. Plotin admet une idée éternelle de chaque être, car chaque être, pour être distingué tel, est la mise en action d'une raison particulière et chacun révèle un aspect du monde intelligible (*Ennéade*, 253-270 ap. JC, V, 7[184]). Et Plotin d'affirmer qu'il ne faut pas craindre l'infinité que sa thèse introduit dans le monde intelligible : le nombre d'êtres déterminés par le déploiement de toutes les raisons est fini. L'infini est seulement dans l'intelligence.

Si le monde est continu, c'est qu'on peut dans chaque être retrouver au prix d'une analyse infinie une infinité d'éléments : le monde même, que chaque être exprime de son point de vue. Que l'on puisse les y trouver ne signifie pas que ces éléments composent cet être au sens physique. Sans quoi chaque être serait le monde.

---

[182] Voir particulièrement A. Philonenko « La loi de continuité et le principe des indiscernables » *Revue de métaphysique et de morale* n° 3, 1967, pp. 261-286.

[183] Leibniz a toutefois été en contact avec le néoplatonisme italien, notamment à travers Michelangelo Fardella (1650-1718) qu'il rencontra à Venise en 1690. Voir également G. Rodier *Sur une des origines de la philosophie de Leibniz* in *Etudes de philosophie grecque* (1926, Paris, Vrin, 1981).

[184] trad. fr. en 7 volumes, Paris, Les Belles Lettres, 1924-1989.

Contrairement à l'image que l'on associe couramment à sa philosophie, le continu, pour Leibniz, est un principe. Il ne se tire pas de la réalité - laquelle est essentiellement discontinue.

*

2. 3. 13.

La discontinuité physique.

Tous nos objets d'expérience sont finis, note Louis Couturat (*De l'infini mathématique*, 1896, L. 4, chap. 3[185]). A l'infinité d'une grandeur, remarque L. Couturat, sont liés des caractères d'homogénéité et de continuité, en ce sens que le nombre infini correspond à la divisibilité à l'infini d'une grandeur homogène et continue. Or il est clair que la continuité et l'homogénéité ne sont pas des caractères propres aux choses que nous livrent nos sens. Dans la pratique, l'expérience n'admet qu'une approximation limitée par la finesse de nos sens et de nos instruments.

L'infiniment court.

On sait que la persistance des images sur la rétine nous empêche de suivre des phénomènes brefs comme l'éclair. Pour aller au détail du mouvement, il nous faut des instruments tels que le laser, lequel a permis de diminuer la durée d'exposition de la milliseconde à seulement quelques femtosecondes (un millionième de milliardième de seconde), ce qui est l'échelle de temps caractéristique des mouvements des atomes, dont nous pouvons observer en temps réels les déplacements lors de réactions chimiques. A ce stade, on a pu mesurer des impulsions lumineuses durant à peine 650 attosecondes (650 milliardièmes de milliardième de seconde).

Dans un mouvement, une durée, nous constatons très approximativement une continuité qui n'est pas celle que nous concevons être parfaitement régulière et homogène - continue en un mot. Le continu est un principe et à ce titre, souligne Couturat, un caractère essentiel de toutes les grandeurs, même les plus intensives : la masse, ou l'intensité d'un courant, d'un champ par exemple, dont nous ne pouvons concevoir qu'elles puissent varier de manière discontinue en passant d'une valeur rationnelle à une autre sans prendre successivement *toutes* les valeurs de l'intervalle. Le continu est un principe qui informe a priori notre expérience du monde, loin qu'un tel principe puisse être tiré dans sa pureté de l'expérience. Cette loi ou principe de continuité signifie que l'on passe toujours du petit au

[185] Paris, Alcan, 1896.

grand dans les degrés comme dans les parties et que jamais un mouvement ne naît immédiatement du repos ni ne s'y réduit que par un mouvement plus petit.

Cette affirmation d'une évolution continue du mouvement, ainsi que du passage sans saut du mouvement au repos ou l'inverse, cette affirmation qui deviendra l'une des bases de la mécanique classique, n'allait pas de soi au XVII° siècle, souligne Michel Blay (*Les raisons de l'infini*, 1993, p. 127 et sq.[186]). Descartes, ainsi, ne s'y ralliait point. Il écrit à Mersenne (*Lettre du 11 octobre 1638*[187]) que ce que dit Galilée - que les corps qui chutent passent par tous les degrés de vitesse - ne lui semble pas juste ordinairement, même si cela peut être vrai dans certains cas. M. Blay cite encore le *Traitté de la percussion ou chocq des corps* (1673) d'Edme Mariotte, lequel refuse notamment de dire avec Galilée qu'un mouvement accéléré l'est dès le premier instant. Mariotte se méfie de ce premier instant forcément infinitésimal, relevant d'une division indéfinie qui évoque les paradoxes de Zénon. Il faut du temps pour produire la plupart des effets naturels, affirme-t-il… Aristote disait qu'il ne peut y avoir d'instant premier ni pour le repos ni pour le mouvement, puisqu'ils se produisent tous deux dans le temps, qui est toujours divisible (*Physique*, 335-332 av. JC, VI, 236a et sq.).

De fait, le principe de continuité ne s'imposera qu'à la faveur de la définition du principe de moindre action, par Pierre Fermat d'abord, puis par Maupertuis en 1746. Ce principe (que nous n'exposerons pas plus avant ici, voir 3. 3. 11.), vérifié en premier lieu dans le transport des rayons lumineux, énonce que "dans tout changement, la quantité d'action nécessaire pour ce changement est la plus petite qu'il soit possible[188]". Ce principe allait dominer la physique jusqu'à la mécanique quantique.

*

La discontinuité quantique.

En 1899, en effet, Max Planck fit part d'étranges observations : à une certaine température, le rayonnement d'un corps s'effectue par valeurs discrètes - par quanta.

On savait que la température d'un système physique règle l'agitation (l'énergie cinétique) de ses constituants et que la couleur du corps chauffé elle-même dépend de cette température : lorsqu'on chauffe un morceau de fer, il passe successivement du rouge, au blanc puis au bleu. Il restait à trouver la relation exacte entre ce rayonnement et la

[186] Paris, Gallimard, 1993.
[187] *Oeuvres philosophiques*, 3 volumes, Paris, Garnier, 1988.
[188] L'action est définie par Maupertuis comme le produit de la masse par l'espace parcouru et la vitesse.

température. Tel était le " problème du rayonnement du corps noir", posé en 1859 par Gustav Kirchhoff et dont l'intitulé faisait référence au fait que pour observer la lumière produite par un corps chauffé, il faut enfermer celui-ci dans un four dont la paroi est percée d'un trou et qui définit un "corps noir". Planck montra que la transformation de l'énergie en rayonnement est discontinue. Elle a lieu par "paquets" ou quanta d'énergie.

En allemand, "quanta" est une expression courante pour désigner une quantité ponctuelle, indivisible.

On présente généralement cette découverte comme l'acte de naissance de la mécanique quantique. On en était pourtant encore très loin. La surprise de Planck tenait au fait que la lumière, admettait-on à l'époque, était une onde électromagnétique. Une onde, soit ce qui est par essence continu. De sorte qu'Einstein, dès 1905, renversa le problème en supposant l'existence de "grains" de matière propres au rayonnement électromagnétique susceptibles de rendre compte de sa discontinuité. Grains qu'on nommera plus tard les "photons" (voir 2. 4. 8.).

Les observations de Planck et leur théorisation par Einstein, il convient de le noter, n'introduisaient pas la discontinuité dans la matière. A l'époque, l'atomisme s'imposait définitivement et tout atomisme fait par définition reposer la matière sur des entités discrètes, des indivisibles. La nouveauté tenait à ce que la discontinuité qu'introduisaient Planck et Einstein avait rapport à l'expression d'une force - l'énergie de rayonnement E - que Planck établissait égale à sa fréquence v pondérée d'une constante h, soit E =vh[189].

Planck estima cette constante à 6,55 x 10^{-34} joule. seconde. Elle est estimée de nos jours à 6,63 x 10^{-34} joule. seconde

Discontinuité de l'univers quantique. Les relations d'incertitude.

Werner Heisenberg devait en tirer toutes les conséquences : toute mesure d'un phénomène atomique nécessite une interaction, définissant une certaine action A égale au produit de l'énergie d'interaction et du temps de l'observation ($\Delta A = |\Delta E|.\Delta T$). Or cette interaction peut-elle être ramenée à 0, afin de "laisser tranquille" le phénomène observé ? Les relations d'incertitude de Heisenberg posent précisément que $\Delta A = \Delta E \Delta T = h$. La perturbation est donc inévitable. L'acte de mesure interagit avec ce qu'il mesure et modifie son comportement d'au moins h, *le quantum d'action*.

[189] h vaut 6,622. 10^{-34} joule-seconde.

La mécanique quantique s'est bâtie sur cette inégalité, dont il ne faudrait pas faire une limite simplement subjective, c'est-à-dire liée aux capacités de nos appareils d'observation. h est une constante universelle. *Ce n'est pas une limite d'observation mais une limite d'action*. *Aucune interaction entre deux corpuscules quelconques* - l'acte de mesure ne représentant à cet égard qu'un cas particulier - *ne peut être rendue arbitrairement petite*. En d'autres termes, il n'y a pas de moindre action. Pas de continuité donc dans le changement relatif des phénomènes qui a bien lieu, au niveau le plus fin, par sauts ; par quanta. C'est pourquoi, notamment, on ne tiendra compte, dans les calculs, que des états d'oscillation d'un corpuscule, autour de sa position d'équilibre, dont l'énergie est un multiple entier de √h.

Pour Louis de Broglie toute continuité macroscopique - y compris celle de l'espace et du temps - résulte ainsi d'une statistique opérée sur des éléments réellement discontinus (*Continu et discontinu en Physique moderne*, 1941[190]). Certes, en définissant une fonction d'onde, la théorie quantique associe à chaque corpuscule, malgré sa nature ponctuelle, des grandeurs réparties continûment dans l'espace et le temps. Mais ces grandeurs représentent seulement les probabilités de manifestations d'un corpuscule (voir 2. 1. 14.). Dans le monde quantique discontinu, le continu physique n'est plus qu'une estimation statistique. En quoi l'on retrouve néanmoins, cependant, le continu comme principe assurant l'identité d'une grandeur à travers le temps. Le discret, encore une fois, peut se conjuguer avec le continu et la granularité physique, ainsi, avec l'infini - qu'il faudrait néanmoins clairement reconnaître comme méta-physique, ainsi que Leibniz y invitait.

* *

[190] Paris, A. Michel, 1941.

III - L'infini métaphysique

2. 3. 14.

Au terme de notre parcours, l'infini nous invite à envisager métaphysiquement le monde comme une sphère dont le centre est partout et la circonférence nulle part, selon la formule de Nicolas de Cues.

Le fini tient à un acte de détermination. Pour penser tout être déterminé, nous avons besoin de postuler le monde, sans plus de qualification. Cette perspective est l'infini même. Lequel désigne le fait que, logiquement, le monde est le corrélat de toute pensée. Il n'y a donc rien à dire sur l'infini en soi et il est vain d'attendre le rencontrer, puisqu'il n'est qu'à travers une opération de pensée. Cela, cependant, ne le frappe pas d'irréalité, si l'on admet que toute réalité ne se réduit pas à un objet mondain. Au contraire, parce que l'infini est la condition de tout discours sur le monde, il faut reconnaître que le monde est pétri d'infinité. Tout cela qui est chez Leibniz, nous l'avons vu, fut particulièrement développé par Bernard Bolzano ; lequel, avant Georg Cantor, s'attachera à définir logiquement un infini actuel. Il sera si fier de cette découverte qu'il n'hésitera pas à affirmer que cette notion de l'infini est aussi celle qui peut être appliquée à Dieu. Comme Nicolas de Cues, Bolzano jouera, en une perspective mêlant mathématique et métaphysique, sur l'idée que l'infini est le signe même de ce qui peut être conçu sans être représenté - car le vrai n'est pas forcément l'existant. L'infini, en d'autres termes, est un objet méta-physique.

Aucun de ces deux auteurs, cependant, n'ira, à l'instar de la logique hégélienne jusqu'à cesser de viser l'infini comme une réalité inassignable. Hegel, il faut le dire très fort car cela a été très contesté, est l'un des penseurs les plus profonds de l'infini. Il est le seul, à vrai dire, qui prolonge philosophiquement les idées leibniziennes. Tandis que Bolzano, dont Leibniz était l'auteur favori, représente mathématiquement comme le maillon entre ce dernier et Cantor.

Nous allons développer ceci à travers trois textes de A) Bernard Bolzano, B) Nicolas de Cues et C) de Hegel.

A) Bernard Bolzano

2. 3. 15.

LES PARADOXES DE L'INFINI (1847[191])

Bernard Bolzano fut philosophe, théologien (il occupa la chaire de philosophie de la religion à l'Université de Prague en 1805), physicien et mathématicien. C'est à ce dernier titre qu'on le connaît surtout aujourd'hui, pour reconnaître en lui un précurseur de la théorie des ensembles et surtout l'un des fondateurs de l'arithmétisation de l'analyse, soit l'un des premiers mathématiciens à avoir recherché cette rigueur dans la définition des fondements de l'analyse, qu'apporteront après lui Weierstrass ou Dedekind (voir ci-dessus)[192]. Une exigence d'abstraction et de rigueur en regard de laquelle, a-t-on pu noter, un contemporain de Bolzano comme Cauchy, malgré ses efforts pour définir rigoureusement la notion de convergence (voir ci-dessus), reste encore empêtré dans l'intuition géométrique, qui écrit dans l'introduction de son *Cours d'analyse* (1821[193]) : "quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre, lesquelles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie"[194].

Dès 1810, dans ses *Contributions à une exposition des mathématiques sur de meilleurs fondements*, Bolzano rejette l'intuitionnisme mathématique kantien et adopte une sorte de platonisme des formes mathématiques et des vérités intellectuelles[195]. Les *Paradoxes*, publiés de façon posthume en 1851, passèrent longtemps totalement inaperçus. Cantor néanmoins estimera beaucoup l'ouvrage. C'est que tous les efforts de Bolzano tendent à établir que l'infini est un concept aussi "objectif" (*gegenständlich*, dit Bolzano) que celui de n'importe quel nombre entier. Pour lui, en d'autres termes, il existe un infini actuel.

La première définition de l'infini numérique qui ne soit pas celle d'une progression indéfinie.

L'infini et le fini, écrit Bolzano, sont des concepts qui s'appliquent à des ensembles - à des "pluralités" - et donc à des grandeurs (§ 2). C'est là, déjà énoncé, le fondement même, nous l'avons vu, de la réflexion de Dedekind et de Cantor.

Une "pluralité" A est un ensemble dont toutes les parties sont considérées comme des unités d'une certaine espèce A, c'est-à-dire comme des objets subsumables sous le concept de A (§ 4). Une pluralité est ainsi une somme d'éléments. Mais l'inverse n'est pas forcément vrai.

Une pluralité peut être dite infinie quand elle est plus grande que toute pluralité finie. C'est-à-dire quand tout ensemble fini n'est jamais, vis-à-vis d'elle, qu'une partie. On distingue ainsi, dans l'ordre de l'infini, l'infiniment grand (une grandeur supérieure à toute

[191] trad. fr. Paris, Seuil, 1993.
[192] Sur les rapports entre Bolzano et Dedekind, voir M-A. Sinaceur « L'infini et les nombres » *Revue d'histoire des sciences* XXVII/3, 1974, pp. 251-278.
[193] *Oeuvres complètes*, Paris, Gauthier-Villars, 1897.
[194] Voir H. Sinaceur « Cauchy et Bolzano » *Revue d'histoire des sciences* XXVI/2, 1973, pp. 97-112.
[195] Voir J. Laz *Bolzano critique de Kant*, Paris, Vrin, 1993.

grandeur composée d'un nombre quelconque d'unités) et l'infiniment petit (une grandeur si petite que tout multiple d'elle-même reste inférieur à l'unité).

Il n'y a pas d'autre infini que ceux-ci, écrit Bolzano (§ 10) et toute autre définition de l'infini ne peut que manquer son objet. Hegel ainsi, selon Bolzano, qui distingue le "mauvais infini", c'est-à-dire la progression indéfinie d'une grandeur variable, de l'infini qualitatif qu'il ne trouve "qu'en Dieu et dans l'absolu en général", Hegel manque doublement l'infini, note Bolzano (§ 11), qui comprend mal Hegel (voir ci-après). Car l'infini quantitatif ne correspond nullement à la croissance sans limite d'une variable. C'est *une grandeur véritable*, affirme Bolzano, qui donne pour la première fois peut-être une définition de l'infini numérique qui n'est pas celle d'une progression indéfinie. A ce titre, continue Bolzano, Cauchy ne s'élève pas, lui non plus, au dessus de l'infini potentiel, lorsqu'il parle de l'infiniment grand comme de la limite de l'accroissement illimité d'une variable (§ 12). Autant dire que 0 est l'infiniment petit.

Une "grandeur variable" n'est pas une grandeur. C'est le concept d'une grandeur non pas unique mais d'un ensemble infini de grandeurs. Bolzano l'illustre en prenant le cas d'une série très particulière.

Quelle est la somme de 1-1+1-1+1… ?

En 1830, note Bolzano, on voulait encore démontrer que la somme de la série "a-a+a-a+a-…" a une valeur égale à a/2 = x[196]. Aussi bizarre que cela puisse paraître, en effet, cette série préoccupait les géomètres depuis le Moyen-Age. On tentait d'en calculer la somme. Leibniz lui accorda une certaine importance (*Lettre à Wolff*, 1713[197]).

C'est que la question avait quelque incidence métaphysique : quelque chose peut-il être issu de zéro, de rien ? Le Père Guido Grandi avait soutenu que 0+0+0+0 à l'infini donne une quantité non nulle : 1/2 et avait cru découvrir, dans l'apparition de cette grandeur issue du néant, l'explication du mystère même de la Création (*Quadratura circula, et hyperbolae per infinitas hyperbolas, et parabolas geometrice exhibita*, 1703[198]).

Grégoire de Saint-Vincent, en effet, avait montré que (x<1) $1/1-x = 1+x+xx+x^3+x^4+\ldots$ Mercator, lui, avait établi que (x>1) $1/1+x = 1-x+x-x^3+x^4-x^5+\ldots$ D'où l'on pouvait déduire que 1/1+1 = 1/2 = 1-1+1-1… La répétition de purs néants, ainsi, générait - à l'infini - une quantité symbolique comprise entre 0 et 1.

[196] Laplace se moque également de ces spéculations (*Théorie analytique des probabilités*, 1847, CXXX, 2 volumes, Paris, Gabay, 1995).
[197] in Leibniz *Naissance du calcul différentiel*, 1989. Voir les annotations de N. Parmentier p. 436 et sq.
[198] Pisis, ex typographia F. Bindi, 1703.

Leibniz entendit démontrer à son tour ce résultat. Si la série est finie et constituée d'un nombre pair de termes, souligne-t-il, le dernier de ceux-ci sera affecté du signe moins et elle aura pour résultat 0. Si le nombre de ses termes est impair, son dernier terme sera positif et elle vaudra 1. Mais, à l'infini, parité et imparité disparaissent. Il faut donc trouver un moyen terme, c'est-à-dire prendre la moyenne de la somme des deux résultats : 0+1/2 = 1/2. Le fait, en d'autres termes, que la série ne croisse pas indéfiniment mais oscille entre 0 et 1 suffit pour qu'on lui attribue une limite, que Leibniz définit comme la moyenne 1/2 entre ces deux valeurs. Même si ce type d'argument semble plus métaphysique que mathématique, reconnaît-il, il ne laisse pas d'être solide.

Bolzano montre lui que, bien que constituée de termes finis qui semblent s'éliminer eux-mêmes, la série n'est pas convergente (§ 32). Lorsqu'une série est définie comme une grandeur, c'est-à-dire comme la somme de ses termes, il faut qu'elle vérifie la propriété de ne subir aucun changement dans sa valeur, quel que soit le changement introduit dans la succession de ses termes (associativité). La série peut donc s'écrire :

(a-a)+(a-a)… = 0

a+(a-a)… = a

-a+(a-a)… = -a

Où l'on voit que la série n'exprime aucune véritable grandeur (Bolzano ne conçoit pas de manière positive la divergence d'une série).

L'infini ne correspond pas à une indétermination, quoiqu'il ne soit pas non plus un nombre. C'est un concept manipulable dans un calcul.

Telle fut l'originalité de Bolzano en son temps que de penser l'infini comme une grandeur *déterminée*. Il est faux, écrit-il, qu'un ensemble infini, parce qu'infini, ne puisse jamais être embrassé comme un tout et ne puisse donc être saisi en pensée. Nous pouvons nous représenter l'infini au moyen d'un concept, tout comme nous pouvons imaginer la totalité des habitants de Prague sans nous représenter chacun d'eux en particulier. Cette totalité est un nombre que nous savons manipuler (§ 14). Pour Bolzano, l'évidence ne fonde pas la connaissance. *Vrai ne veut pas dire existant*. De sorte que l'on peut travailler valablement avec des concepts qu'aucune intuition sensible ne remplit[199]. Nous avons vu ci-dessus que Leibniz et Malebranche ne disaient rien d'autre.

L'infini, cependant, n'est pas un nombre, sinon, il serait le plus grand nombre. Or *l'idée de nombre est contradictoire avec celle d'infini*. L'infini est une grandeur. Il y a bien plus de grandeurs que de nombres ($\sqrt{2}$, ainsi, n'est qu'une grandeur pour Bolzano). Et il n'est pas contradictoire de parler d'une grandeur infiniment grande ou petite, c'est-à-dire

[199] Voir A. Benmakhlouf « La proto-sémantique de Bolzano » *Les Etudes philosophiques*, octobre-décembre 2000, pp. 489-504.

d'une totalité dont tout ensemble fini d'unités n'est qu'une partie. Ou d'une grandeur en comparaison de laquelle l'unité apparaît comme une totalité dont tout multiple fini de cette grandeur ne forme qu'une partie (§ 16). Une grandeur infinie est une pluralité de parties infinies. De sorte qu'une grandeur - comme $\sqrt{2}$, composée d'une infinité de fractions - qui est la somme d'un ensemble infini de grandeurs dont chacune est finie n'est pas une grandeur infinie. Elle est finie, en effet, par rapport à toute unité posée (§ 18). De même, ajoute Bolzano, un intervalle de temps borné par un commencement et une fin ne peut être infiniment plus grand ou plus petit qu'un autre. Le rapport de deux intervalles bornés est purement fini (§ 27) et c'est ainsi qu'Achille peut finir par rejoindre la tortue.

Un infini peut être plus grand qu'un autre.

Tous les ensembles infinis n'ont pas la même pluralité. Ils ne peuvent donc tous être considérés comme égaux. Un infini peut être plus grand qu'un autre (§ 19). C'est l'affirmation la plus célèbre de l'ouvrage[200].

Deux ensembles infinis, établit Bolzano, peuvent en effet se trouver dans la relation suivante :

- on peut les apparier terme à terme (*i.e.* : établir une bijection entre leurs éléments) ;
- l'un, cependant, contient l'autre comme partie.

L'équivalence de deux grandeurs infinies ne signifie donc pas leur égalité. Il faut encore que leur pluralité soit la même, c'est-à-dire qu'ils aient le même principe de détermination (§ 24). De là, on comprend que si Bolzano entend développer un calcul de l'infini, celui-ci ne consistera pas à compter, c'est-à-dire à déterminer par des nombres mais à établir les rapports entre des ensembles (§ 28).

Bolzano et Cantor.

N'admettre que l'infini potentiel, c'est ne pas sortir du fini, de l'énumération d'éléments ponctuels. Toute l'originalité de Bolzano est de promouvoir le concept d'une grandeur infinie comme une totalité achevée et non comme une succession inachevable. Soit une pluralité *définie par un concept et non par une énumération*. Il légitime mathématiquement l'infini actuel et admet - avant Dedekind et Cantor - que la

[200] Ce point a préoccupé Bolzano bien avant les *Paradoxes*. Voir une note de 1813-1814 extraite de son *Journal*, traduite in J. Sebestik « Premiers paradoxes bolzaniens de l'infini » *Archives de Philosophie* 50, 1987,

correspondance biunivoque d'un ensemble infini avec l'une de ses parties est une caractéristique propre de l'infini et non une contradiction qui en corrompt l'idée.

Toutefois, si Bolzano évite, contrairement à Fontenelle (voir ci-dessus), de définir l'infini comme un nombre - s'il ne tente pas de le trouver au bout d'une série - admettant ainsi qu'une grandeur puisse être déterminable autrement que par un nombre, il ne va pas jusqu'à concevoir un cardinal transfini comme Cantor. Il ne distingue pas entre cardinalité et ordinalité. Il reste finalement prisonnier, en une certaine mesure, de l'intuition géométrique[201].

De plus, comme le signale H. Sinaceur dans l'introduction à la traduction française des *Paradoxes*, l'infiniment petit n'a pas de statut clair chez Bolzano, qui en traite parfois comme d'une réalité positive et parfois comme d'un infini potentiel. Comme le rappelle H. Sinaceur, Cantor distinguera complètement l'infiniment grand de l'infiniment petit, allant jusqu'à écrire que le premier démontre l'impossibilité du second (*Lettre à Franz Goldsceider du 13 mai 1887*, citée pp. 106-107, note 82).

Dieu comme un être infini.

Mais Bolzano n'a pas seulement fait de l'infini actuel un être mathématique. Tout au long de son livre, il ne cesse d'insister sur le fait que l'infini est un attribut des êtres réels qui s'applique même à Dieu. En quoi Bolzano ne peut s'empêcher de « réaliser » l'infini, malgré ses principes.

En ceci également Bolzano annonce Cantor, lequel ne cessera de rechercher une justification religieuse à ses nombres transfinis. Il se présentera même comme le simple "rapporteur" d'une pensée dictée par Dieu.

Selon Bolzano, l'infinité de Dieu n'est rien de qualitatif, au sens où elle échapperait à toute détermination quantitative. Dans la mesure, écrit Bolzano, où nous concevons Dieu comme l'être ayant l'unité la plus parfaite, il y a des points de vue sous lesquels nous apercevons en lui une pluralité infinie. Nous le nommons infini parce que nous lui reconnaissons des forces de plusieurs espèces dont chacune a une grandeur infinie, tel qu'un pouvoir de connaître égal à l'omniscience par lequel il embrasse un *nombre infini* de vérités, etc. Le même concept d'infini caractérise ainsi un segment de droite et les

---

pp. 403-411.

[201] Voir G-G. Granger « Le concept de continu chez Aristote et Bolzano » *Les Etudes philosophiques*, octobre-décembre 1969, pp. 513-523.

différents degrés de l'être. L'infini mène, en un chemin continu, des mathématiques à la métaphysique.

Jusque là, seuls les théologiens possédaient un concept positif de l'infini. En plus d'annoncer très clairement la conceptualisation moderne de l'infini, Bolzano retrouve ainsi, en même temps, la démarche d'un Nicolas de Cues.

* *

B) Nicolas de Cues

2. 3. 16.

DE LA DOCTE IGNORANCE (1440[202])

A l'origine de ce livre, il y a une vision que Nicolas de Cues eut, en une sorte de révélation, une nuit de novembre 1437 sur un bateau qui le ramenait de Constantinople. Selon beaucoup de commentateurs, le livre marque un tournant, à l'aube des temps modernes, entre la tradition scolastique issue d'Aristote et le néoplatonisme de la Renaissance[203]. En fait, la plupart des thèmes de l'ouvrage sont empruntés à une théologie négative d'origine néoplatonicienne - le Cusain cite beaucoup Denys l'aréopagite - dont le courant demeura vivace tout au long du Moyen-Age et dont l'influence est patente dans la scolastique elle-même, chez Thomas d'Aquin par exemple (voir 1. 4. 9.).

Toute connaissance est rapport, écrit Nicolas de Cues. Elle tient à une comparaison de proportions. Tout concorde ou diffère et Pythagore, ainsi, a pu juger que tout est constitué par la force des nombres (voir ci-dessus). Seul l'infini échappe à toute proportion. C'est l'inconnu même et, comme tel, il est l'attribut privilégié de l'absolu. Le signe d'un néant de signification qui nous renvoie à notre inconnaissance et nous installe dans une docte ignorance.

Sur l'occurrence de ce thème dans la théologie apophatique, voir 1. 2. 5. Insistons sur le fait que la connaissance de cette théologie négative est indispensable pour réellement comprendre ce qui va suivre. Nous n'y renverrons plus.

L'infini exprime la suressentialité.

Sans proportion, l'infini n'a ni diversité ni différence par rapport à lui-même ou quelque autre chose que lui-même. Il est "l'égalité maxima". Il est tout ce qui peut être. C'est l'Un, en un sens tout plotinien, le "Dieu béni" que seul au dessus de la raison

[202] trad. fr. Paris, Trédaniel/La Maisnie, 1979.
[203] Voir particulièrement E. Cassirer *Individu et cosmos dans la philosophie de la Renaissance*, 1927, trad. fr.

l'intellect peut saisir dans la mesure où il perçoit ce qui est invisible aux sens. Une docte ignorance peut donc seule nous tourner vers le maxima qui dépasse toute compréhension. Du Créateur, l'incommensurabilité nous offre ainsi à la fois comme un miroir et une énigme.

L'infini absorbe tout.

Nous n'avons pas de nom auquel ne puisse être opposé un autre nom. Mais notre intelligence finie ne saurait "combiner les contradictoires" (*copulatio contradictorum*). Pourtant, puisqu'il est tout, les déterminations les plus opposées s'abolissent dans l'infini[204]. En lui, toute chose est unité et l'unité est une trinité. L'accident y est substance et le corps esprit. Car *tout coïncide dès lors qu'on ne compte plus de rapports*, écrit N. de Cues.

On lui reprocha de ruiner toute science, en supprimant à la fois le principe de contradiction et celui du tiers exclu sur lesquels reposait la logique aristotélicienne. Nicolas de Cues répliqua que la docte ignorance conduit à une vision où tout raisonnement cesse. Où l'on voit d'un seul coup d'œil et comme simultanés les termes que la raison n'atteint que successivement[205].

A l'infini, les opposés se rejoignent. Le courbe est droit.

Par rotation, ainsi, la droite engendre un triangle, un cercle, une sphère. Si une courbe est d'autant moins courbe qu'elle correspond à la circonférence d'un cercle plus grand, en effet, la circonférence d'un cercle maximum est courbe au minimum, c'est-à-dire droite.

C'était un principe scolastique intangible que le courbe est distinct du droit, sans qu'aucun genre n'existe qui puisse permettre de les penser ensemble. Proclus avait bien affirmé que toute réalité participe simultanément à la rectitude et à la circularité. Mais il ne tentait pas de l'illustrer géométriquement. Il interprétait ces deux modalités selon le double mouvement de la procession et de la conversion plotinienne (voir 1. 11. 6.) : toute chose procède selon la ligne droite et se retourne, selon la ligne courbe, vers son propre bien (*Commentaire sur le Parménide*, V° siècle, VI, § 128[206]).

Paris, Minuit, 1983.

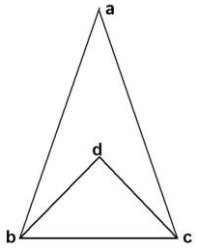
[204] Le thème de la participation des contraires l'un à l'autre dans l'Un apparaît déjà chez Platon (voir J. Wahl *Etude sur le Parménide de Platon*, Paris, Rieder & Cie, 1926, p. 102).

[205] Voir E. Vansteenberghe *Le cardinal Nicolas de Cues*, Paris, Honoré Champion, 1920, chap. III.

[206] trad. fr. en 3 volumes, Paris, Leroux, 1900-1903.

Chez le Cusain lui-même, nous sommes assez loin d'une méthode de quadrature (même si N. de Cues utilisa cette méthode dans des essais géométriques, par ailleurs fort approximatifs[207]). Il recherche plutôt une loi de relation géométrique entre les figures : une surface engendre une ligne et réciproquement. Le triangle, ainsi, se résout à une ligne, écrit le Cusain. Il est un cercle (pp. 65-67).

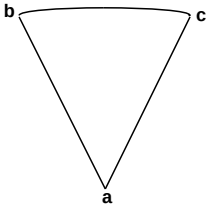
Tout triangle a ses trois angles égaux à deux droits. Ainsi, plus un angle est droit, plus les autres sont petits. Dans "le triangle qui est au dessus de toute mesure", écrit N. de Cues, un angle peut être augmenté jusqu'à la limite de deux droits sans que disparaisse le triangle. Un seul angle du triangle, ainsi, en est trois et les trois sont un (la symbolique trinitaire est assez claire, voir). Maintenant, deux côtés d'un triangle sont d'autant plus longs que le troisième que l'angle qu'ils font est plus petit que deux droits :



bac est beaucoup plus petit que deux droits et les lignes ba et ac sont ainsi d'autant plus longues que bc.

Plus cet angle sera grand (comme bdc), plus sa superficie sera petite. Si, à la limite, cet angle valait deux droits, le triangle se résoudrait en une ligne simple.

Maintenant, posons un triangle abc créé par la rotation de la ligne ab jusqu'en c, a restant fixe :



Si ab était infinie, une rotation complète de b, jusqu'à revenir à sa position initiale, définirait le cercle maximum. Portion de l'arc infini, bc, selon ce que nous avons vu plus haut, serait alors une ligne droite. Et *parce que toute partie de l'infini est infinie*, souligne le Cusain, bc ne serait pas plus petit que la circonférence entière du cercle. A l'infini, le triangle abc est donc égal au cercle.

Plus et moins n'ont aucune proportion avec l'infini, dit N. de Cues. A l'infini, deux n'est pas plus petit que cent. L'unité n'est pas un nombre. Elle ne s'oppose pas non plus à la pluralité. Dès lors, toutes les affirmations se rapportant à Dieu ne peuvent être assez compréhensives. Les noms particuliers le diminuent à l'infini. Une théorie de la négation seule mène donc jusqu'à l'affirmation. Sinon, écrit le Cusain, on adore Dieu comme une

[207] *Ecrits mathématiques*, trad. fr. Paris, H. Champion, 2007. J-F. Montucla juge sévèrement les oeuvres géométriques de Nicolas de Cues et notamment son calcul de la cycloïde (*Histoire de la quadrature du cercle* in *Histoire des mathématiques*, 1802, T. 4, pp. 621-622. Voir aussi T. I, p. 538).

créature et non comme infini. Dieu n'est ni Dieu, ni Fils, ni Saint Esprit. Il est seulement infini. Il est toute chose sans préférence et n'est rien du tout. L'infini passe toute détermination, donc toute limitation, donc toute contradiction[208].

Comme le souligne M. de Gandillac, nombre des thèmes du Cusain sont empruntés à Plotin et surtout à Proclus (M. de Gandillac signal également l'importance de Maître Eckhart, voir 1. 4. 9.). Les Platoniciens, ainsi, avaient défini, sur le plan "démiurgique", un pouvoir intellectuel qui unifie les contraires par une sorte de "surabondance". Mais ils ne l'avaient pas lié à l'intuition mystique du Transcendant. A travers le concept d'infini, l'originalité de N. de Cues est de tenter d'interpréter positivement la nuit mystique (*La philosophie de Nicolas de Cues*, 1941, chap. 5[209]).

L'infini est unité.

Le Moyen-Age, nous l'avons vu, célébrait l'infini comme la marque du divin. Nicolas de Cues va plus loin. Il identifie le divin à l'infini et retrouve ainsi le sens présocratique de l'illimité à la racine de toute chose. L'infini est le signe de l'Etre, au sens où la *quiddité* de chaque chose nous renvoie à l'Illimité comme à son fondement, écrit Nicolas de Cues (qui cite Anaxagore, voir ci-dessus). Le Cusain, note Hermann Cohen, fait de l'infinité la mesure de toute chose (*Logique de la connaissance pure*, 1902, Introduction[210]).

La pluralité dans le monde, écrit le Cusain, vient de ce que Dieu est dans le néant. Qu'on ôte Dieu de la créature, seul le néant reste. La créature, ainsi, n'est qu'une infinité finie. La forme infinie est reçue en elle d'une façon finie, c'est-à-dire que la créature est Dieu *tel qu'un hasard l'a fixé*, va jusqu'à écrire le Cusain. La nature des choses, ainsi, n'a pas à être recherchée. Elle ne tient à rien qu'à ses propres déterminations contingentes. Au-delà, elle participe de l'Etre. Mais *Dieu communique l'être sans diversité*. Dans l'infini, toutes choses ne sont qu'une seule chose. Toute créature, ainsi, est parfaite comme telle et ne désire pas être autre chose. Elle aime avant tout ce qu'elle tient du Maximum, c'est-à-dire moins ce qu'elle est que le fait qu'elle est (l'influence de Maître Eckhart, ici, est patente. Voir 1. 4. 9.). Tout être créé est en repos dans sa perfection. Le repos est unité. Il enferme le mouvement qui n'est qu'une série ordonnée de repos.

---

[208] Voir J-M. Counet *Mathématiques et dialectique chez Nicolas de Cues*, Paris, Vrin, 2000. Voir également J. Sfez *L'Art des conjectures de Nicolas de Cues* (Paris, Beauschène, 2012), où la coïncidence des opposés est également développée en termes mathématiques.
[209] Paris, Aubier, 1941.
[210] trad. fr. in *Néokantismes et théorie de la connaissance* (ss la dir. De M. de Launay), Paris, Vrin, 2000.

On comprend que certains, comme Giordano Bruno, aient pu lire dans le Cusain que tout se réduit à une inépuisable Nature qui est Dieu et le monde tout à la fois (voir ci-dessus, 2. 4. 5. & 2. 5.10.).

Le monde n'a pas de circonférence.

Il n'est qu'une actualité, l'infini qui est en acte, dans son néant, toute possibilité d'être. Pour rien d'autre, on ne peut donner en acte quelque chose qui le termine. L'univers, ainsi, n'est ni fini ni infini, conclut N. de Cues. Le monde n'a pas de circonférence.

Copernic n'osera pas aller si loin. Son univers sera encore celui, sphérique, d'Aristote, même s'il sera considérablement agrandi puisque le vide qui sépare Saturne des étoiles fixes est si immense, selon Copernic, que nous ne pouvons déceler la moindre parallaxe annuelle d'une étoile pour en mesurer l'éloignement au soleil. Il faudra attendre Giordano Bruno pour que l'univers soit pensé comme infini. Mais cette thèse - qu'il reprendra pourtant explicitement à notre cardinal - le condamnera au bûcher.

Si le monde avait un centre et une circonférence, il aurait en lui-même son commencement et sa fin et serait terminé par rapport à quelque chose d'autre. En fait, son centre et sa circonférence sont Dieu. Il n'est donc pas infini mais on ne peut le concevoir comme fini, puisqu'il n'est pas enfermé dans des limites. La machine du monde, affirme N. de Cues, en une formule qui allait devenir mémorable (voir 2. 5. 13.), a pour ainsi dire *son centre partout et sa circonférence nulle part*.

Cette formule ("*sphaera cuius centrum ubique, circumferentia nullibi*") était assez répandue au Moyen Age (on la trouve dans *Le roman de la rose*, chez saint Bonaventure et Vincent de Beauvais, plus tard chez Rabelais). Elle apparaît pour la première fois dans un manuscrit anonyme du XII° siècle, le *Livre des vingt-quatre philosophes*. On en attribua souvent l'origine à Hermès Trismégiste.

Synthèse des contraires à l'infini… Beaucoup de commentateurs voient en Nicolas de Cues un précurseur de Hegel. La perspective hégélienne est pourtant toute autre.

* *

C) Hegel

2. 3. 17.

SCIENCE DE LA LOGIQUE. I. L'ETRE (1812[211])

Les principaux textes relatifs à l'infini sont :

[211]trad. fr. Paris, Aubier Montaigne, 1972.

- Infinité qualitative. 1° section, chap. II, C.
- Infinité quantitative. 2° section, chap. II, C.

Tout l'infini est dans le fini.

Pour percer le secret de l'infini - telle est en substance la démonstration de Hegel - il suffit d'examiner comment, conceptuellement, nous en venons à qualifier un être de "fini".

Considérons un être, n'importe lequel, un simple être-là immédiat et qualifions-le d'une manière quelconque, déterminons-le. Jugeons qu'il est ceci ou cela. Disons que c'est un crayon par exemple. L'être, alors, cède la place à ce que Hegel nomme la "déterminité" (*Bestimmtheit*), c'est-à-dire qu'il n'est plus là seulement comme un pur être. Une détermination, une idée, s'ajoute à son être. Et ainsi l'être est mis en perspective. "Comme déterminité étant en soi", souligne en effet Hegel, la déterminité s'outrepasse, elle se rapporte à soi comme à sa négation. Car l'être, en effet, n'a pas seulement une détermination. Il est déterminé de façon *particulière*, c'est-à-dire *exclusive* de toute autre. Il est ceci et non cela. Sa détermination ne peut donc être formulée comme telle. En soi, une idée n'a aucune signification. Elle ne prend sens que par rapport à d'autres. Un être ne peut être nommé qu'en regard d'autres qui ne sont pas lui. L'affirmation est inséparable d'une négation et l'être nommé d'un non-être : de tout ce qu'il n'est pas.

A travers sa détermination, ainsi, l'être-là n'est pas seulement déterminé, il est *fini*. Ce qui signifie que ce n'est alors plus tant son être qui constitue sa nature que sa détermination. Il n'est plus simplement. Il est à travers ce qu'il est. Le fini signifie le passage de l'être dans l'idéalité.

Dans la *Science de la logique*, l'infinité qualitative introduit à "l'être-pour-soi". Elle marque l'apparition de l'idéalité, écrit Hegel dans l'*Encyclopédie des sciences philosophiques* (1830, I. Science de la logique § 95[212]). La finité des choses ne correspond pas à ce qu'elles sont en soi mais par rapport à d'autres, d'où elles tirent leurs déterminations (§ 119 Add.).

Sur le fini, il n'y a pas grand chose à dire, car en soi, il n'est rien, comme l'infini. Sa réalité ne tient qu'à sa relation à la pensée. Le fini est idéel dans son être même[213].

A un être fini s'attache deux caractères : son être est défini par une détermination. Laquelle ne prend sens - n'est distincte et déterminante - qu'en rapport à son autre, qui est tout ce qu'elle n'est pas. Qui est Tout – tout le reste qui, en tant que tel, est indéterminé, indéfini.

[212] trad. fr. Paris, Vrin, 1986.
[213] Voir Q. Lauer « Hegel on Infinity » *Thought* LVI n° 222, september 1981, pp. 287-300.

Etre fini, c'est se nier soi-même en se limitant à sa propre détermination. C'est reconnaître sa propre exclusivité, en effet. Or cette négation revient aussi bien à poser du même mouvement un autre que soi qui est *tout* le non-soi. Qui est tout le reste, ainsi, sans autre détermination. Qui est infini – ou plutôt indéfini.

L'infini ainsi est inclus dans l'idée de fini, comme le fond sur lequel se détache toute détermination prêtée à un être. Qui est ce par quoi le fini "sursume sa propre borne" et est une négation de la négation que représente l'acte de détermination, selon les termes hégéliens. L'infini est donc ainsi simplement un moment de la réflexion qui désigne quelque chose comme ayant une détermination particulière ; c'est-à-dire comme finie. Comme l'avait vu Leibniz, toute détermination inclut de proche en proche l'univers entier : l'infini se tire du fini (voir ci-dessus).

L'infini n'est qu'une relation, que Hegel rapporte à la qualification même de quelque chose comme finie. L'infinité est la détermination indéfinie du fini, écrit-il. L'infini est ce que le fini est en soi. Ainsi, l'infini est-il déterminé par son autre. Il n'apparaît que dans un rapport, c'est-à-dire dans ce rapport qui fait de son être tel être. Cette analyse va tellement à l'encontre de ce qu'on entend la plupart du temps par "infini" qu'il convient d'y insister : *l'infini n'est en rien quelque chose qui serait par delà le fini. Et Hegel, en ceci, ne cherche pas à défendre quelque nouvelle idée de l'infini. Il tente seulement de montrer qu'on a tout dit sur l'infini quand on a qualifié quelque chose de fini car, pour le faire, il faut mobiliser tout le reste du monde.* Un nombre ainsi n'existe que par rapport à la suite de tous les autres, au double sens où il est formé d'autres nombres et où il ne compte qu'entre d'autres nombres. Et si la suite des nombres est infinie, ce n'est pas qu'il existe quelque part une telle suite achevée, c'est que tout nombre conduit à en poser d'autres. Tout de même, je ne peux envisager un homme en lui-même. Il n'est homme que parce que d'autres le sont et sont comme lui sans être exactement lui. Dans ce cas, la somme des hommes est finie mais au sens où je ne considère que tel homme, elle est, comme horizon, indéfinie (peu importe que cet homme soit 1 sur 7 943 892 709 ou sur 7 943 892 703 autres hommes). *Disons de manière imagée que lorsque nous nous penchons sur la détermination précise de quelque chose, le reste du monde paraît flou un instant. Ce tout est tout l'infini.* Et tout l'infini, au sens métaphysique, au sens de l'infinité prêtée au monde et à Dieu, est là. Le Tout en regard duquel les êtres existent et sont quelque chose, sans paraître pouvoir se soutenir seuls sans lui, puisqu'autrement ils seraient le monde.

On comprend ainsi que, pour la pensée religieuse, l'infinité est tout à la fois première et inconcevable. Sans l'infini, en effet, les choses seraient sans détermination et en regard de cette détermination l'infini est lui totalement vide de détermination. La réalité de l'infini est logique - syntaxique pourrait-on dire presque.

Mais cet infini n'est encore que quantitatif : pure répétition inachevable d'un acte de détermination - compter un chiffre après l'autre - qu'on répute infini, parce que nous ne pouvons manquer d'imaginer que ce décompte va quelque part et représente, tout là-bas, dans l'infini, quelque énorme somme. L'infini ne tient pourtant qu'au jugement qui qualifie un être et lui attache une détermination particulière, donc bornée, donc finie. Dès lors que l'être-là est qualifié, il n'est ce qu'il est que dans sa limite qualitative et par cette limite, écrit Hegel dans l'*Encyclopédie* (addition au § 92[214]).

Chaque être est comme la limite du monde, disions-nous à propos des conceptions leibniziennes.

*

L'opposition du fini et de l'infini.

L'infini ne surpasse pas le fini. Mais l'infinité du fini, écrit Hegel, consiste à se surpasser lui-même dès lors qu'il est pensé comme fini, c'est-à-dire de faire référence à autre chose qu'à lui-même qu'il exclut pour être ce qu'il est. Cette exclusion le désignant par là-même comme fini. Ni le fini ni l'infini n'ont donc comme tels et séparément l'un de l'autre de vérité. Nous ne pouvons que les appréhender ensemble car chacun est en lui-même le contraire de soi c'est-à-dire l'unité avec son autre. Mais il ne faut pas non plus dire que fini et infini sont la même chose, précise Hegel. C'est là une image trop statique de ce qui est essentiellement en devenir. L'infini est le parvenir au fini et le fini le parvenir à l'infini. Toutefois, lorsque nous qualifions un être, cette négation se donne comme immédiate. De sorte que fini et infini sont, pour la représentation, absolument opposés. Leur entrelacement logique ne peut être saisi que conceptuellement.

Couramment, l'infini est pensé comme l'au-delà de toute finitude et il acquiert ainsi une réalité propre. Il passe même pour la réalité suprême puisqu'il est infini. On le considère comme un objet.

Descartes, ainsi, saisit bien que l'idée d'infini ne se dégage que de la détermination d'un objet comme fini – en l'occurrence de la conscience de notre propre finitude ou

[214] trad. fr. Paris, Vrin, 1986.

imperfection. Mais, pour Descartes, à l'idée d'infini s'attache, par rapport à celle du fini, celle de perfection. Il lui est donc impossible de concevoir que l'infini ne se tire que du fini et qu'il en soit la négation. L'idée de finitude, toute négative, ne peut nous venir que d'une limitation de l'infini. Il faut donc admettre que l'idée d'un être plus parfait que nous doit être en nous pour que nous concevions notre propre finitude (*Troisième Méditation*, 1641[215]). Nous avons en nous une idée générale et première de l'être (*A Clerselier*, le 23 avril 1649[216]). L'infini est Dieu et l'idée que nous avons de sa perfection, première en nous, détermine toute notre compréhension du monde et de nous-mêmes. Pourtant, l'infini ne représente pas pour nous une idée distincte. L'infini n'est donc pas différent du néant qui absorbe toute détermination de Nicolas de Cues.

Si l'on fait de l'infini une réalité, l'être véritable du fini semble, au-delà de sa détermination, être au-delà de lui, dans l'Illimité. Dans le fini, la théologie apophatique perçoit la négation de l'Etre et nie cette négation par le Néant qu'elle attribue à l'Etre (voir 1. 2. 6.). Sans s'apercevoir qu'elle pense ainsi, contradictoirement, un néant déterminé.

Damascius remarquait en ce sens que si l'Un est parfaitement transcendant, il ne peut être transcendant à quoique ce soit, car la transcendance est encore une relation (voir 1. 2. 6.).

Sous une tout autre perspective, c'est encore ainsi qu'Emmanuel Levinas parle de l'infini (*Totalité et infini*, 1961[217]). Certes, pour lui, l'infini n'est pas une chose. Et il se tire du fini. C'est un surplus d'être par rapport à ce que la pensée découvre des êtres. Par là, il n'est justement pas une représentation et la conscience ne le connait pas en tant que tel. L'infini ne se dévoile pas en lui-même. Il nous échappe. Il n'est pour nous qu'une limite, une transcendance du visage d'autrui qui, dans sa présence, sa parole, dans sa nudité, déborde l'idée que nous pouvons nous faire de lui. Ce n'est pas une chose mais un vide. Une rupture de la pensée qui, dans la rencontre des autres, nous interdit de les réduire à la représentation que nous avons d'eux, au caractère que nous leur prêtons. L'infini est ce qui déborde ainsi la simple image de l'Autre donc mais qui ne se et ne le manifeste pas au sens propre. L'infini est l'expression même de l'Autre en tant qu'Autre. Il ne le dévoile pas mais l'exprime, jaillit de sa chair – quoique l'infini relève moins pour Levinas de la vision que de la parole. L'infini marque la limite à toute appropriation de l'Autre. C'est une réalité métaphysique à laquelle l'éthique donne accès.

---

[215] Œuvres philosophiques II, Paris, Bordas, 1988.
[216] *Idem*, T. III.
[217] Paris, LDP, 1990.

Mais, quoiqu'insaisissable, il s'agit bien d'une réalité, d'une valeur en soi. Sans quoi l'infini se réduirait à la manière dont je perçois l'Autre, ce qui loin de marquer sa transcendance par rapport à moi le désignerait comme relatif et libre seulement à travers moi, souligne Jacques Derrida (*Violence et métaphysique*, 1964[218]). Mais si l'infini est une valeur, cette valeur est vide – moi qui suis l'Autre de l'Autre, quel sens cela a-t-il pour moi ? Derrida note que Levinas n'explore pas cette symétrie. C'est qu'il fait de l'infini une réalité en soi et non une relation.

*

Le "mauvais infini".

L'opposition immédiate du fini et de l'infini qui échappe nécessairement à toute représentation et qui n'est que la pure négation du fini par l'indéfini - l'infini, ainsi, ne pouvant être autrement défini que comme ce qui n'a pas de fin - cette opposition immédiate est ce que Hegel nomme "mauvais infini". Le progrès à l'infini qui voit le fini tenter de se dépasser sans jamais parvenir à rejoindre l'infini et celui-ci se tenir, inaccessible, au terme inassignable de la répétition ennuyeuse d'une série.

La représentation s'égare et s'épuise à penser ainsi l'infini, comme Fontenelle se demandant ce qu'il pouvait bien y avoir entre le dernier nombre fini et l'infini (voir ci-dessus). Au lieu de s'élever à l'infini, écrit Hegel, la représentation s'enferme alors dans le fini, indéfiniment répété et croit manquer quelque chose.

Dans *L'Encyclopédie* (§ 94 et add.), Hegel en prend pour illustrations le *Philèbe* de Platon et le devoir-être de la morale kantienne.

Y aurait-il donc, selon Hegel, quelque autre vérité de l'infini ? Nullement si l'on entend par là une autre vérité que celle du rapport du fini et de l'infini, que la réflexion conduit à reconnaître comme l'infinité, tandis que l'imagination se laisse inévitablement prendre au mirage de l'infini, malgré sa problématique représentation.

L'infini, c'est la finité même, soit la relation à soi d'un être qui est déterminé en regard de son autre (ce qui est un pléonasme : toute détermination est négation. Elle est forcément en elle-même la considération de son autre).

La seule vérité de l'infini est que la pensée procède par détermination, c'est-à-dire par exclusion, par négation. Et qu'elle produit ainsi positivement des réalités

[218] in *L'Ecriture et la différence*, Paris, Seuil, 1967.

indéterminables, comme l'Absolu, comme l'Etre, comme l'infini, qui ont précisément pour fonction de ne pouvoir être déterminées. On ne peut donc qu'échouer à vouloir atteindre l'infini. On le pense alors comme absolu, comme Etre. Mais on ne parvient jamais à se le représenter, sinon comme néant, ou plutôt comme négation : la série dont on ne parvient jamais au bout. Le tout auquel on échoue à attribuer une quelconque détermination tant il les dépasse toutes. Comme relation, l'infini ne trouve à être pensé, souligne Hegel, que dans l'ordre de la quantité - autre détermination de l'Etre - c'est-à-dire dans le calcul.

*

L'infini mathématique.

Certes, la mathématique, elle-aussi, s'égare, quand elle tente de penser l'infiniment grand et l'infiniment petit comme des quanta, c'est-à-dire comme des quantités déterminées, des grandeurs données, des nombres, écrit Hegel avant Bolzano. L'infini s'évanouit alors dans l'insignifiance, selon la marche du progrès à l'infini, alors que l'infini, par définition, est la négation même de tout quantum. La différence néanmoins est que l'opposition du fini à l'infini, en mathématique, n'est plus totalement extérieure. Fini et infini ne se font pas simplement face comme l'indéfini et l'être fini. L'infini numérique n'est plus cet absolu ultime outrepassant toute détermination. Car le quantum change et devient un autre quantum à l'infini. Il se continue dans son être autre. L'infini est généré par une relation - une fonction dirions-nous plutôt - qui dévoile la vérité de l'infini. Car *l'infini n'est qu'une relation.* Le quantum, ainsi, n'est pas seulement déterminé en tant que pure quantité. Il est situé et est posé également comme grandeur. Dans la *Science de la logique*, l'infini quantitatif introduit aux relations de grandeur. Finalement, le calcul différentiel a bien affaire à l'infini véritable, c'est-à-dire tel que la raison peut le penser dans sa vérité.

Ce que Hegel entreprend de montrer en une longue remarque qui appelle quelques observations préliminaires.

*

Incompréhensions quant à la démarche hégélienne.

A l'époque où écrivait Hegel, la mathématique n'avait encore guère pu justifier logiquement les résultats qu'elle obtenait dans le calcul infinitésimal (voir ci-dessus). Ces résultats, en fait, valaient pour toute justification. Au-delà, nous l'avons vu, Lazare Carnot, dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (1797[219]), pouvait faire reposer le calcul différentiel sur une double approximation compensée. La mathématique ne vient pas à bout de la métaphysique ou de la critique qui concerne son objet, écrit donc Hegel. La querelle quant à la métaphysique du calcul infinitésimal était encore ouverte en effet et Hegel voudrait la considérer close. En ceci, Hegel ne dira pas vraiment autre chose que Leibniz et ici nous allons donc avoir une démonstration que, dans le domaine des idées, compte beaucoup moins ce qui est dit que celui qui le dit et la manière dont il le dit. Ainsi Hegel sera-t-il vertement critiqué par un bon connaisseur de la pensée mathématique, Jean Toussaint Desanti, lequel, concluant à l'inopportunité des analyses hégéliennes en termes mathématiques, a fait croire à beaucoup que Hegel, en cette remarque, se serait indûment fourvoyé (*La philosophie silencieuse ou critique des philosophies de la science*, 1975, pp. 22-66[220]). Or jamais sans doute Desanti ne se serait permis un tel dédain vis-à-vis de Leibniz, l'inventeur du calcul intégral !

Hegel, à suivre Desanti, fournirait l'exemple même de ce que la philosophie ne doit pas faire lorsqu'elle traite des sciences : produire un discours réducteur, plaquant ses propres concepts sur une matière qu'il ignore et dont il néglige les méthodes propres.

Bertrand Russell affirmait de même s'être détaché de Hegel après avoir lu les pages que ce dernier consacre au calcul infinitésimal. Pages en lesquelles Russell ne vit qu'un "non-sens brouillon".

En fait, plus encore que l'incompréhension du sens même des analyses hégéliennes dont J. T. Desanti fait montre, c'est l'innocuité de sa réflexion qui est étonnante. Desanti remarque ainsi que le discours hégélien ne permet pas de reproduire "les concepts mathématiques dans le champ où se constitue le système effectif de leur connexion", ce qui semble assez évident puisque ce n'est nullement là l'objet dudit discours. Si les analyses de Desanti reviennent à dire que pour faire des mathématiques il est préférable d'être mathématicien plutôt que philosophe, on le lui accordera volontiers. La réponse à la question de savoir ce que la philosophie peut apporter de mathématique aux mathématiques est assez évidente : rien ! Et Hegel le reconnaissait (voir 1. 15. 5.). Toutefois, puisqu'il s'agit de la philosophie de Hegel, la question serait plutôt de savoir de

[219] 2 volumes, Paris, Blanchard, 1970.
[220] Paris, Seuil, 1975.

quelle manière le calcul différentiel s'intègre au discours hégélien. Question que J. T. Desanti ne pose pas, qui conclut : "la question du statut rationnel et de la productivité théorique du maillon conceptuel constitutif des enchaînements de la *Wissenschaft der Logik* reste entière" (p. 63).

Les mathématiques saisissent bien toute la vérité de l'infini.

Concernant l'infini, la mathématique se tient beaucoup plus haut que la métaphysique, affirme Hegel. Car c'est bien le concept de l'infini véritable qui se trouve au fondement de l'infini mathématique. En témoigne le fait qu'il n'est plus un quantum mais un moment. "Il n'est que le concept de son être-déterminé".

La représentation hésite devant le statut qu'elle doit accorder à la différentielle, nous l'avons vu. Différentielle qui n'est pas égale à zéro tout en étant si insignifiante, comme quantité, que l'on peut ne pas lui prêter attention. C'est que l'infinitésimal n'a de signification qu'en rapport avec une grandeur. En dehors de ce rapport, il n'est rien. Nous l'avons vu, c'est là ce que disait d'Alembert. Mais sans rien en conclure quant à la métaphysique de l'infini, sinon pour dire que celle-ci n'avait pas sa place en mathématique. D'Alembert croyait avoir évacué l'infini, alors qu'au sens hégélien il en saisissait bien plutôt la véritable nature.

Hegel s'attarde à considérer ainsi les différents niveaux de l'expression d'un quantum. La fraction 2/7 est un rapport. En regard d'un simple nombre, elle a un caractère qualitatif, c'est-à-dire relationnel. A ce titre, elle a déjà en elle-même, imparfaitement, le moment de l'infinité. Une infinité d'autres nombres, en effet, peuvent être posés à la place de 2 et de 7 de telle sorte que la valeur de la fraction ne change pas. Néanmoins, ce rapport reste indifférent par rapport aux quanta déterminés 2 et 7. Exprimons ce rapport en remplaçant 2 et 7 par a/b. Les lettres sont des signes généraux désignant des nombres possibles, indéterminés. Toutefois, ils représentent encore des nombres particuliers (ce ne sont pas des variables) extérieurs au rapport. Prenons à présent la fonction $y^2/x = p$. Les lettres y^2 et x n'y apparaissent pas au titre de quanta déterminés. Leur relation même est un quantum variable. La relation d'une grandeur à la puissance n'est pas un quantum, écrit Hegel mais une relation conceptuelle. Une relation essentiellement qualitative. Nous avons vu ci-dessus qu'en ce sens même, Leibniz en appelait à une « algèbre universelle » et souhaitait une logicisation des mathématiques, qui sera réalisée après lui.

Pourquoi seulement "à la puissance" ? J. T. Desanti n'a pas manqué de souligner que, pour un entendement mathématicien, cela sonne absurde (*op. cit*. pp. 43-44). Dans l'ensemble des entiers, si dans

l'expression a/b on substitue à a son carré a^2, ce carré est aussi bien un entier. Mais, bien qu'obscure, il est vrai, l'affirmation de Hegel se comprend assez facilement. Un quantum élevé à la puissance n'est plus, *pour la représentation*, un nombre immédiatement déterminé. Il est d'emblée une relation. Il *est* un calcul.

Quant à dx/dy, ils ne signifient plus du tout un quantum. Ils ne sont plus quelque chose et ne sont pas non plus néant. Ce ne sont que les déterminations d'un coefficient différentiel. Hors de cette relation, ils sont de purs zéros. *Le quantum, ainsi, est achevé en quantum qualitatif. Il est rendu effectivement infini*, écrit Hegel.

Comme le souligne un commentateur, loin de considérer les grandeurs finies comme fondamentales et les opérations qu'on peut faire sur elles comme les seules possibles, Hegel opère un renversement total de perspective en plaçant au sommet de la pensée les grandeurs infinies et la fluidité qu'elles permettent[221].

La mathématique atteint donc bien l'infini. Hegel en veut pour preuve le fait que Newton, par exemple, déclare expressément que les différentielles ne sont pas des indivisibles mais des "divisibles évanouissants" ; des limites de sommes et de relations et non des grandeurs dernières. Même si, comme le rappelle Desanti, la justification de Newton, toute mathématique, est bien loin des considérations hégéliennes, il n'est pas interdit de réfléchir, même en faisant des mathématiques...

Malgré tout, Newton encombre le calcul infinitésimal de considérations de mouvement et de vitesse qui lui sont, écrit Hegel, "extra-essentielles"[222]. Hegel reprend également Newton - un peu comme le faisait Berkeley (voir ci-dessus) - quant au caractère peu rigoureux de certaines de ses solutions commodes en matière de calcul, qui montrent que Newton, selon lui, n'atteint pas parfaitement le concept d'une détermination de grandeurs qui n'est que le moment d'une relation[223]. A la différence de Leibniz, nous l'avons vu, Newton ne centre pas l'analyse sur la notion de fonction.

En fait, note Hegel, l'infini mathématique est souvent représenté au moyen du mauvais infini. Mais cela ne lui est pas essentiel. Ce qu'on nomme "expression finie" ou "somme" d'une série, en effet, ne comporte pas de manque. La série est inachevable mais non pas inachevée. Sa limite lui appartient, note Hegel. De sorte que la loi de la série "rappelle l'au-delà dans sa fuite".

---

[221] D. Parrochia « Hegel : logique spéculative et mathématiques pseudo-synthétiques » *Kairos* n°4, 1993, pp. 113-150.
[222] En cette critique, Hegel ne fait que suivre Lagrange (*Théorie des fonctions analytiques*, 1797).
[223] Sur cette critique de Newton, voir A. Lécrivain et al. *Introduction à la lecture de la* Science de la logique *de Hegel. L'Etre*, Paris, Aubier, 1981, p. 207 et sq., ainsi que D. Parrochia *op. cit*.

Hegel loue finalement Carnot d'avoir inscrit l'infini mathématique dans la loi de continuité. En vertu de cette loi, les grandeurs évanouissantes gardent la relation dont elles proviennent avant qu'elles ne disparaissent. La loi de continuité en effet, souligne Hegel, exprime la disparition des quanta comme purs moments de la relation. Finalement, ce n'est là rien d'autre que ce qui arrive quand un être est compris, c'est-à-dire élevé au dessus de lui-même dans l'essentialité ; compris non en tant qu'il est seulement mais pour ce qu'il est.

*

"Peut-être Hegel fut-il le premier à comprendre à fond l'idée aristotélicienne de l'infini, note un commentateur [qui oublie malheureusement Leibniz], qui n'est pas un dépassement mais une délimitation, la négation radicale du préjugé que les choses sont extérieures à la pensée. Car, évidemment, le rapport fini/infini (…) n'est rien d'autre que le rapport particulier/universel à l'intérieur même du penser"[224].

L'infini, disait Aristote, n'a de sens qu'à être conçu à l'intérieur de quelque chose qui l'enveloppe. C'est un relatif qui tend à se réaliser de manière indépendante mais dont la réalisation demeure toujours en puissance. En ceci, Aristote, nous l'avons vu, rapprochait l'infini de la matière. Car, "de même que le point, bien qu'il ne constitue pas une grandeur, n'est pourtant pas un néant de grandeur mais quelque chose de la grandeur à savoir sa puissance et son commencement, de même la matière, bien qu'elle ne fasse pas un être, n'est pourtant pas un néant d'être, mais quelque chose comme sa limite, sa puissance et son commencement", écrira Charles de Bovelles (*Le livre du néant*, 1511, p. 45[225]).

Comme principe de réalité à peine qualifié qui permet d'interroger le continu, la matière est le double de l'infini.

*

* *

[224] E. Fleischmann *La Science universelle ou la Logique de Hegel*, Paris, Plon, 1967, p. 98.
[225] trad. fr. Paris, Vrin, 1983.